CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices ***sont autorisées****.*

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Les candidats peuvent utiliser la calculatrice pour faire leurs calculs et donner directement la réponse sur la copie.
Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE 1

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

1. Démontrer que la fonction f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ que l'on déterminera.

2. Démontrer que la fonction f est différentiable en $(0,0)$.

EXERCICE 2

1. Rappeler la définition (par les suites) d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.

2. Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application continue de E dans F.
   Si A est une partie compacte de E, démontrer que $f(A)$ est une partie compacte de F.
   L'image réciproque par f d'une partie compacte de F est-elle nécessairement une partie compacte de E ?

PROBLÈME : PHÉNOMÈNE DE GIBBS

Partie préliminaire

1. (a) Justifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0;\pi]$.

   On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Rappeler le développement en série entière en 0 de la fonction sinus et déterminer, avec soin, une suite $(u_k)_{k\geq 0}$ vérifiant $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k$.

2. (a) Démontrer que la suite $\left(\dfrac{\pi^n}{n\,!}\right)_{n\geq 0}$ converge et que la suite $\left(\dfrac{\pi^n}{n.n\,!}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante.

   (b) Si $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$, majorer $|R_n|$, en utilisant la question (a).

   En déduire, en précisant la valeur de n utilisée, une valeur approchée du réel $\dfrac{2}{\pi}I$ à 10^{-2} près.

Première partie : Phénomène de Gibbs

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ impaire et de période 2π vérifiant :

$$f(t) = 1 \text{ pour } t \in]0;\pi[\quad \text{et} \quad f(0) = f(\pi) = 0.$$

3. On pose pour tout entier naturel n non nul et t réel,

$$S_n(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1}.$$

   Démontrer, à l'aide d'une série de Fourier, que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

4. Sur un même graphique, uniquement à l'aide d'une calculatrice, tracer sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ la courbe de la fonction f et l'allure de la courbe de la fonction S_{10}. Puis sur un autre graphique, tracer sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ la courbe de la fonction f et l'allure de la courbe de la fonction S_{20}.

   Que constate-t-on sur les courbes des fonctions S_n lorsque t se rapproche de 0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures ?

   Cette particularité est appelée phénomène de Gibbs.

5. On pose pour n entier naturel non nul et t réel,

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\sin[(2k+1)t].$$

(a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$T_n(t) = \frac{\sin^2(nt)}{\sin t}.$$

Dans la suite de cette question 5., on considère deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et $[a,b] \subset \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

(b) Justifier qu'il existe une constante M telle que pour tout entier naturel n non nul et tout $t \in [a,b]$, $T_n(t) \leq M$.

(c) Démontrer que l'on peut trouver une suite de réels (w_n) convergeant vers 0 et telle que pour tout entier naturel n non nul et tout $t \in [a,b]$, $|f(t) - S_n(t)| \leq w_n$.
En commençant par observer que $\sin[(2k+1)t] = T_{k+1}(t) - T_k(t)$, on pourra chercher à majorer, pour tout couple (n,p) d'entiers naturels non nuls et tout $t \in [a,b]$, $|S_{n+p}(t) - S_n(t)|$.
Que peut-on en déduire concernant la série de Fourier de la fonction f ?

6. (a) Calculer $S_n'(t)$ pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer la plus petite valeur α_n qui annule $S_n'(t)$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Démontrer que, pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et n entier naturel non nul,
$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t \quad \text{puis que} \quad S_n(\alpha_n) = \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin \frac{u}{2n}}\,\mathrm{d}u.$$

(c) Démontrer que la suite $(S_n(\alpha_n))_{n\geq 1}$ converge et préciser sa limite.
On pourra utiliser sans démonstration : pour $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\theta \geq \dfrac{2\theta}{\pi}$.

7. Démontrer que la suite $\left(\sup\limits_{x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[} |S_n(x) - f(x)|\right)_n$ ne converge pas vers 0.

Deuxième partie : Démonstration du théorème de convergence normale

Pour une fonction f continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π, on note pour tout $n \in \mathbb{Z}$:
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t.$$

8. Rappeler le théorème de Parseval (avec les coefficients $c_n(f)$) pour une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π.
Dans le cas où la fonction f est de plus continue sur $\mathbb{R}$, justifier que si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = 0$ alors f est la fonction nulle.
Ce résultat reste-t-il valable si la fonction f est seulement continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π ?

9. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π dont la série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = c_0(f) + \sum_{p=1}^{+\infty}(c_{-p}(f)e^{-ipt} + c_p(f)e^{ipt}).$$

(a) Justifier que l'application g est continue sur $\mathbb{R}$ puis pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, exprimer, avec soin, $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$.

(b) Démontrer que $f = g$.

10. Dans cette question, f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de période 2π et de classe C^1 par morceaux.
On pose pour n entier naturel non nul et t réel,

$$u_n(f)(t) = c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int}.$$

(a) Déterminer une relation entre $c_n(f')$ et $c_n(f)$.

(b) Démontrer que pour tout t réel,

$$|u_n(f)(t)| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2).$$

(c) Démontrer, avec soin, que la série de fonctions $\sum u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et préciser vers quelle fonction.

(d) Énoncer le théorème que l'on vient de démontrer.
Le phénomène de Gibbs peut-il se produire pour cette fonction f ?

Fin de l'énoncé