CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

Exercice 1 : une série de Fourier

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, vérifiant :
pour tout réel $x \in]0, \pi[$, $f(x) = 1$ et $f(0) = f(\pi) = 0$.

1. Représenter graphiquement la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis déterminer la série de Fourier de la fonction f.
2. Justifier l'existence des sommes suivantes et utiliser la question précédente, en énonçant les théorèmes utilisés, pour donner leur valeur :

$$(a) \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad\qquad (b) \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \; .$$

Exercice 2 : un système différentiel

On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente.
   En utilisant sans démonstration l'égalité $e^{t\,A} = e^{2t} e^{t\,(A-2I_2)}$, valable pour tout réel t, donner l'expression de la matrice $e^{t\,A}$.
2. En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

Problème : séries de Taylor et développement en série entière

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie préliminaire

Dans cette partie, les questions sont indépendantes les unes des autres et leurs résultats peuvent être admis dans la suite du problème.

1. Justifier, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, l'existence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1}$ et donner sa valeur.
2. On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t \; .$$

   Démontrer que pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\Gamma(n)$.

3. Démontrer la formule de Taylor avec reste de Laplace (ou reste intégral) :
si I est un intervalle contenant le réel a, si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I, alors pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \, .$$

On rappelle le theoreme suivant :
Si une fonction f admet un développement en série entière sur l'intervalle $]-a, a[$, alors :
- la fonction f est de classe C^∞ sur $]-a, a[$,
- son développement en série entière est unique et est donné par la série de Taylor de la fonction f à l'origine :

$$\text{pour tout réel } x \in \,]-a, a[\, , \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \, .$$

I. Quelques exemples d'utilisation de ce théorème

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et pour tout réel } x \neq 0 \, , \; f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5. Expliciter une fonction f de classe C^∞ sur un voisinage de 0 et vérifiant, pour tout entier naturel n, l'égalité $f^{(n)}(0) = n.\,n!$

6. Un théorème des moments
Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 1$:

$$\forall x \in \,]-R, R[\, , \;\; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \, .$$

On suppose, que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$.
L'objectif de cette question est de montrer que f est identiquement nulle sur $]-R, R[$.

(a) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 1]$.

(b) A l'aide du calcul de $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2 \mathrm{d}x$, démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$.

(c) Démontrer que f est la fonction nulle sur l'intervalle $]-R, R[$.

II. Contre-exemples

7. Donner un exemple de fonction f à la fois de classe C^∞ sur un intervalle I et développable en série entière au voisinage de l'origine, mais qui ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur I tout entier.

8. Un exemple de fonction ne coïncidant avec sa série de Taylor en 0 sur aucun voisinage de 0

   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $f(0) = 0$.

   (a) Donner, à l'aide de la calculatrice (sans étude), l'allure de la courbe de la fonction f.

   (b) Par les théorèmes généraux, la fonction f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
   Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in\,]0, +\infty[$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

   (c) Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ avec pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(0) = 0$.
   Par parité, la fonction f ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

   (d) La fonction f est-elle développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$?

9. Un exemple où la série de Taylor de la fonction f en 0 a un rayon nul

   Pour tout x réel, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 + t\,x^2}\,\mathrm{d}t$.

   (a) Justifier que, pour tout réel x, la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1 + t\,x^2}$ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$, puis démontrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   On admettra que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que l'on obtient les dérivées successives en dérivant sous le signe intégrale.

   (b) Pour $t \in]0, +\infty[$, calculer, au moyen d'une série entière, les dérivées successives en zéro de la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1 + t\,x^2}$ pour en déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n.

   (c) Quel est le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$?
   La fonction f est-elle développable en série entière à l'origine ?

III. Condition suffisante

On se propose, dans cette partie, d'étudier une condition suffisante pour qu'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle centré en 0 soit développable en série entière au voisinage de 0.

10. Soient a un réel strictement positif et f une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle $]-a, a[$.
    On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout réel $x \in\,]-a, a[$ et pour tout entier naturel n, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$.

    (a) Démontrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de l'origine.

    (b) Donner un exemple simple de fonction pour laquelle ce résultat s'applique.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 13 1156 – D'après documents fournis