EXERCICE I

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.

I.1. Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ $(r > 0)$ de $\mathbb{R}$?

EXERCICE II

II.1. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

II.2. Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe du couple (X,Y) vérifie :

$$\text{pour tout } (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{P}(X = i, Y = j) = P[(X = i) \cap (Y = j)] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

II.2.a. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.

II.2.b. Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.

II.2.c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

PROBLÈME : Fonction Digamma

Partie préliminaire

III.1.

III.1.a. Soit $x \in]0, +\infty[$, démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.1.b. On note, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ (fonction Gamma d'Euler).

Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) > 0$.

III.1.c. Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

III.2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \frac{1}{n}$.

III.2.a. Utiliser un théorème du cours pour justifier simplement que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

III.2.b. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ converge.

La limite de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ sera notée γ *dans tout le sujet* (γ est appelée la constante d'Euler). Dans la suite de ce problème, on définit pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ appelée fonction Digamma.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

III.3. Pour $x \in]0,+\infty[$ et pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ telle que :

$$\text{pour tout } t \in]0,n],\ f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ et pour tout } t \in]n,+\infty[,\ f_n(t) = 0.$$

III.3.a. Démontrer que pour tout $x < 1$, $\ln(1-x) \leq -x$.

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $t \in]0,+\infty[$, $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1}$.

III.3.b. En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

III.4. On pose, pour n entier naturel et pour $x \in]0,+\infty[$, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\mathrm{d}u$.

III.4.a. Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

III.4.b. En déduire, pour n entier naturel et pour $x \in]0,+\infty[$ une expression de $I_n(x)$.

III.4.c. Démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!\,n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}$ (formule de Gauss).

III.5. Pour tout entier $n \geq 1$, on note toujours $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

En remarquant que pour $n \geq 1$ et $x \in]0,+\infty[$, $\dfrac{1}{n^x}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = e^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{\frac{-x}{k}}\right]$, démontrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{\frac{-x}{k}}\right]$ (formule de Weierstrass).

III.6.

III.6.a. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

III.6.b. On pose, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$. Démontrer que l'application g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

III.6.c. En déduire que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{-1}{x} - \gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$. On rappelle que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

III.7.

III.7.a. Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

III.7.b. Calculer, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x+1)-\psi(x)$ puis démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\displaystyle\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

III.7.c. On pose, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ et k entier naturel, $\displaystyle j_k(y) = \frac{1}{k+y+1} - \frac{1}{k+y+x}$.

Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} j_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\psi(x+n)-\psi(1+n))$.

III.8. Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $]0,+\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

- $f(1) = -\gamma$,
- pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x+1) = f(x) + \dfrac{1}{x}$,
- pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(f(x+n)-f(1+n)) = 0$.

Autour de la fonction Digamma

III.9. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On effectue un premier tirage d'un boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant :

si on a tiré la boule numéro k, on la remet alors dans l'urne
avec k nouvelles boules toutes numérotées k.

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus 3 nouvelles boules numéro 3).

On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule choisie au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

III.9.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $E(X)$.

III.9.b. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que pour tout entier naturel non nul k, $\displaystyle P(Y=k) = \frac{1}{n}\left(\psi(2n+1)-\psi(n+1)+\frac{k}{n+k}\right)$.

III.9.c. Calculer l'espérance $E(Y)$. On pourra utiliser, sans démonstration, que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n\left(\psi(2n+1)-\psi(n+1)\right).$$

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 16 1213 – D'après documents fournis