Proposition de Corrigé
Concours Commun INP 2020 – Mathématiques 1 (Filière MP)

PARTIE I - Développement ternaire

Étude de l'application σ

Q1.

L'ensemble ℓ^∞ est inclus dans l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. La suite nulle est bornée. Si $u, v \in \ell^\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a pour tout n, $|\lambda u_n + v_n| \leq |\lambda| \|u\| + \|v\|$, donc la suite $\lambda u + v$ est bornée. ℓ^∞ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, c'est un espace vectoriel réel. L'application $u \mapsto \|u\| = \sup_{n \geq 1} |u_n|$ vérifie les trois axiomes d'une norme :

- **Séparation :** Si $\|u\| = 0$, alors pour tout n, $|u_n| = 0$, donc $u = 0$.
- **Homogénéité :** $\|\lambda u\| = \sup |\lambda u_n| = |\lambda| \sup |u_n| = |\lambda| \|u\|$.
- **Inégalité triangulaire :** $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\| + \|v\|$. En passant à la borne supérieure, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Q2.

Pour tout $u \in \ell^\infty$ et tout $n \geq 1$, on a $\left|\frac{u_n}{3^n}\right| \leq \frac{\|u\|}{3^n}$. La série géométrique $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente car de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{u_n}{3^n}$ est absolument convergente, donc convergente. L'application σ est bien définie.

Q3.

Par linéarité de la somme de séries convergentes, σ est linéaire. De plus, pour tout $u \in \ell^\infty$:

$$|\sigma(u)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|u_n|}{3^n} \leq \|u\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \|u\| \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{\|u\|}{2}$$

Cette inégalité prouve que la forme linéaire σ est continue sur ℓ^∞, et que sa norme subordonnée vérifie $\|\sigma\| \leq \frac{1}{2}$.

Q4.

Si $t \in T$, alors pour tout $n \geq 1$, $0 \leq t_n \leq 2$. En sommant ces inégalités divisées par 3^n (toutes les séries convergent) :

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n}{3^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = 2 \times \frac{1/3}{1 - 1/3} = 1$$

Donc $\sigma(t) \in [0, 1]$.

Q5.

Par définition, $\sigma(\tau) = \frac{1}{3^1} + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = \frac{1}{3}$. Pour τ', on a :

$$\sigma(\tau') = \frac{0}{3^1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = 2 \times \frac{1/3^2}{1 - 1/3} = \frac{2/9}{2/3} = \frac{1}{3}$$

Puisque $\sigma(\tau) = \sigma(\tau')$ alors que $\tau \neq \tau'$, l'application n'est pas injective sur T.

Développement ternaire propre

Q6.

Posons $y = 3^{n-1}x$. On a $t_n(x) = \lfloor 3y \rfloor - 3\lfloor y \rfloor$. Par définition de la partie entière, $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$, ce qui implique $-3y \leq -3\lfloor y \rfloor < -3y + 3$. En ajoutant $3y$, on obtient $0 \leq 3y - 3\lfloor y \rfloor < 3$. L'entier $3\lfloor y \rfloor$ peut être entré dans la partie entière :

$$t_n(x) = \lfloor 3y \rfloor - 3\lfloor y \rfloor = \lfloor 3y - 3\lfloor y \rfloor \rfloor$$

Puisque $0 \leq 3y - 3\lfloor y \rfloor < 3$, sa partie entière ne peut prendre que les valeurs $0, 1, 2$. Donc $t_n(x) \in \{0, 1, 2\}$, d'où $t(x) \in T$.

Q7.

Par définition de la partie entière, $x_n \leq x < x_n + \frac{1}{3^n} = y_n$. La différence $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$ tend vers 0. Étudions la monotonie :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lfloor 3^{n+1}x \rfloor - 3\lfloor 3^n x \rfloor}{3^{n+1}} = \frac{t_{n+1}(x)}{3^{n+1}} \geq 0$$

La suite (x_n) est donc croissante. De même, on montre que (y_n) est décroissante. Les deux suites sont adjacentes et leur limite commune, par encadrement, est x. Par une somme télescopique, $\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k(x)}{3^k} = x_n - x_0 = x_n$ (car $\lfloor x \rfloor = 0$). En passant à la limite, $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t_k(x)}{3^k} = \sigma(t(x))$. Ceci prouve que pour tout $x \in [0, 1[$, il existe un antécédent dans T. (Pour 1, on peut prendre la suite constante égale à 2). L'application restreinte à T est donc surjective sur $[0, 1]$.

Q8.

```
def flotVersTern(n, x):
    res = []
    for k in range(1, n + 1):
        tk = int(3**k * x) - 3 * int(3**(k-1) * x)
        res.append(tk)
    return res
```

Q9.

```
def ternVersFlot(l):
    s = 0
    for k in range(len(l)):
        s += l[k] / (3**(k + 1))
    return s
```

Q10.

```
def ajout(l):
    s = sum(l)
    if s % 2 == 0:
        l.append(-1)
    else:
        l.append(-2)
    return l

def verif(l):
    s = sum(l[:-1])
    if s % 2 == 0 and l[-1] == -1:
        return True
    elif s % 2 != 0 and l[-1] == -2:
        return True
    return False
```

PARTIE II - Étude d'une fonction définie par une série

Q11.

Posons $u_n(x) = \frac{1+\sin(nx)}{3^n}$.

— Chaque u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

— La série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car $\|u_n\|_\infty \leq \frac{2}{3^n}$ (série géométrique convergente).

— La série des dérivées $\sum u_n'(x) = \sum \frac{n\cos(nx)}{3^n}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car $\|u_n'\|_\infty \leq \frac{n}{3^n}$. D'après la règle de d'Alembert ou les croissances comparées, cette série converge.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, φ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q12.

Par linéarité de la somme :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \frac{1/3}{1-1/3} + \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{ix}}{3}\right)^n\right)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}/3}{1-e^{ix}/3}\right) = \frac{1}{2} + \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}}{3-e^{ix}}\right)$$

En multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{e^{ix}}{3-e^{ix}} = \frac{\cos x + i\sin x}{3-\cos x - i\sin x} \times \frac{3-\cos x + i\sin x}{3-\cos x + i\sin x}$$

Le dénominateur devient $(3-\cos x)^2 + \sin^2 x = 9 - 6\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 10 - 6\cos x$. La partie imaginaire du numérateur est $\sin x(3-\cos x) + \cos x \sin x = 3\sin x$. D'où $\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3\sin x}{10-6\cos x}$.

Q13.

D'après Q11, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \varphi'(x)$. On dérive l'expression obtenue à la Q12 :

$$\varphi'(x) = \frac{3\cos x(10-6\cos x) - 3\sin x(6\sin x)}{(10-6\cos x)^2} = \frac{30\cos x - 18\cos^2 x - 18\sin^2 x}{(10-6\cos x)^2} = \frac{30\cos x - 18}{(10-6\cos x)^2}$$

Q14.

En utilisant l'expression sous forme de série et en intégrant terme à terme (convergence normale sur $[0,\pi]$) :

$$\int_0^\pi \varphi(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{1+\sin(nx)}{3^n}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\left[x-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{3^n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n3^n} = \frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{n3^n}$$

En utilisant la forme explicite de Q12 :

$$\int_0^\pi \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1}{2}\mathrm{d}x + \int_0^\pi \frac{3\sin x}{10-6\cos x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}+3\int_0^\pi \frac{\sin x}{10-6\cos x}\mathrm{d}x$$

En identifiant les deux expressions et en divisant par 3 :

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{10-6\cos x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{n3^{n+1}}$$

Calcul de la somme à l'aide du développement en série entière $-\ln(1-u)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^n}{n}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1/3)^n}{n} = -\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1/3)^{n-1}}{n} = \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

La somme totale vaut $\frac{1}{3}\left(\ln(4/3)-\ln(2/3)\right)=\frac{1}{3}\ln 2$.

Q15.

Directement, en remarquant la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=10-6\cos x$ et $u'(x)=6\sin x$:

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{10-6\cos x}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}\ln(10-6\cos x)\right]_0^\pi = \frac{1}{6}(\ln(16)-\ln(4)) = \frac{1}{6}\ln(4) = \frac{1}{3}\ln 2$$

PARTIE III - Développements ternaires aléatoires

Q16.

$T_{n,N}$ étant finie, elle admet des moments de tous ordres.

$$\mathbb{E}(T_{n,N}) = 0\times\frac{1}{N}+1\times\frac{1}{N}+2\times\left(1-\frac{2}{N}\right) = \frac{1}{N}+2-\frac{4}{N} = 2-\frac{3}{N}$$

$$\mathbb{E}(T_{n,N}^2) = 0^2\times\frac{1}{N}+1^2\times\frac{1}{N}+2^2\times\left(1-\frac{2}{N}\right) = \frac{1}{N}+4-\frac{8}{N} = 4-\frac{7}{N}$$

$$\mathbb{V}(T_{n,N}) = \mathbb{E}(T_{n,N}^2)-\mathbb{E}(T_{n,N})^2 = 4-\frac{7}{N}-\left(4-\frac{12}{N}+\frac{9}{N^2}\right) = \frac{5}{N}-\frac{9}{N^2}$$

Par linéarité de l'espérance, et par indépendance pour la variance :

$$\mathbb{E}(X_N) = \sum_{n=1}^{N}\frac{\mathbb{E}(T_{n,N})}{3^n} = \left(2-\frac{3}{N}\right)\frac{1/3(1-1/3^N)}{1-1/3} = \left(1-\frac{3}{2N}\right)\left(1-\frac{1}{3^N}\right)$$

$$\mathbb{V}(X_N) = \sum_{n=1}^{N}\frac{\mathbb{V}(T_{n,N})}{9^n} = \left(\frac{5}{N}-\frac{9}{N^2}\right)\frac{1/9(1-1/9^N)}{1-1/9} = \frac{5N-9}{8N^2}\left(1-\frac{1}{9^N}\right)$$

Q17.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X_N)}{\epsilon^2}$$

Puisque $\mathbb{V}(X_N) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{5}{8N}$, la variance tend vers 0. Donc $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \epsilon) = 0$.

Q18.

Par l'inégalité triangulaire, $|X_N - 1| \leq |X_N - \mathbb{E}(X_N)| + |\mathbb{E}(X_N) - 1|$. Si $|X_N - 1| \geq \epsilon$, alors nécessairement au moins l'un des deux termes de droite est $\geq \epsilon/2$. L'événement de gauche est donc inclus dans la réunion des deux événements de droite. L'inégalité découle de la sous-additivité d'une mesure de probabilité (union bound). Or, $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}(X_N) = 1$. Donc pour N assez grand, $|\mathbb{E}(X_N) - 1| < \epsilon/2$, ce qui implique que l'événement $\{|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geq \epsilon/2\}$ est vide et sa probabilité nulle. Avec la limite obtenue en Q17, on conclut que $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \epsilon) = 0$.

PARTIE IV - Fonction de Cantor-Lebesgue

Étude d'une suite de fonctions

Q19.

La fonction f_0 est la fonction identité, son graphe est le segment reliant $(0,0)$ à $(1,1)$. La fonction f_1 est définie par trois segments : - Il relie $(0,0)$ à $(1/3, 1/2)$ sur $[0,1/3]$. - Il est constant (palier) à $y = 1/2$ sur $[1/3, 2/3]$. - Il relie $(2/3, 1/2)$ à $(1,1)$ sur $[2/3, 1]$. La fonction f_2 reproduit ce schéma sur les segments inclinés de f_1 : on aura un nouveau palier à $y = 1/4$ sur l'intervalle $[1/9, 2/9]$ et un palier à $y = 3/4$ sur l'intervalle $[7/9, 8/9]$, en plus du palier central à $y = 1/2$ sur $[1/3, 2/3]$ qui est conservé. (On précisera qu'il faut tracer ces trois allures sur la copie).

Démontrons par récurrence sur n la proposition $\mathcal{H}_n : \forall x \in [0,1],\ f_n(x) \in [0,1]$.

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $f_0(x) = x \in [0,1]$ pour tout $x \in [0,1]$. $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain entier $n \geq 0$. Soit $x \in [0,1]$.
  - Si $x \in [0, 1/3]$, alors $3x \in [0,1]$. D'après $\mathcal{H}_n$, $f_n(3x) \in [0,1]$. Donc $f_{n+1}(x) = \frac{f_n(3x)}{2} \in [0, 1/2] \subset [0,1]$.
  - Si $x \in]1/3, 2/3[$, $f_{n+1}(x) = 1/2 \in [0,1]$.
  - Si $x \in [2/3, 1]$, alors $3x - 2 \in [0,1]$. D'après $\mathcal{H}_n$, $f_n(3x-2) \in [0,1]$. Donc $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{f_n(3x-2)}{2} \in [1/2, 1] \subset [0,1]$.

  Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est à valeurs dans $[0,1]$.

Q20.

Voici l'implémentation récursive en Python :

```
def cantor(n, x):
    if n == 0:
        return x
    if x <= 1/3:
        return cantor(n-1, 3*x) / 2
    elif x <= 2/3:
        return 1/2
    else:
        return 1/2 + cantor(n-1, 3*x - 2) / 2
```

Q21.

Démontrons la propriété par récurrence sur n. Posons $M_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$.

- **Initialisation (n=0) :** Pour $n = 0$, $f_1(x) - f_0(x)$. Sur $[0, 1/3]$, la différence est $3x/2 - x = x/2 \leq 1/6$. Sur $[1/3, 2/3]$, elle est $1/2 - x$, dont la valeur absolue est $\leq 1/6$ aux bornes. Sur $[2/3, 1]$, elle est $1/2 + (3x - 2)/2 - x = 3x/2 - 1/2 - x = x/2 - 1/2$, max en $x = 2/3$ qui vaut $|1/3 - 1/2| = 1/6$. Ainsi $M_0 = \frac{1}{6}$. Or pour $n = 0$, $\frac{1}{3\times 2^{0+1}} = \frac{1}{6}$. La propriété est vraie.
- **Hérédité :** Supposons $M_{n-1} \leq \frac{1}{3\times 2^n}$ pour un certain $n \geq 1$. Évaluons $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
  - Si $x \in [0, 1/3]$: $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \left|\frac{f_n(3x)}{2} - \frac{f_{n-1}(3x)}{2}\right| \leq \frac{1}{2}M_{n-1}$.
  - Si $x \in]1/3, 2/3[$: $f_{n+1}(x) = 1/2$ et $f_n(x) = 1/2$ (car dès $n \geq 1$, le palier central est constant). Donc la différence est nulle.
  - Si $x \in [2/3, 1]$: $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \left|\left(\frac{1}{2} + \frac{f_n(3x-2)}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{f_{n-1}(3x-2)}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}M_{n-1}$.

  Dans tous les cas, $M_n \leq \frac{1}{2}M_{n-1}$. Par l'hypothèse de récurrence, $M_n \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{3\times 2^n} = \frac{1}{3\times 2^{n+1}}$. L'hérédité est prouvée.

On a donc bien $\forall x \in [0, 1]$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3\times 2^{n+1}}$.

Q22.

Considérons la série de fonctions $\sum(f_{n+1} - f_n)$. D'après Q21, $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{3\times 2^{n+1}}$. Ceci est le terme général d'une série géométrique convergente (de raison $1/2 < 1$). La série de fonctions $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge donc **normalement** sur $[0, 1]$, ce qui implique qu'elle y converge **uniformément**. Or, la suite des sommes partielles de cette série est $\sum_{k=0}^{n-1}(f_{k+1} - f_k) = f_n - f_0$. Puisque la série converge uniformément, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

Q23.

- **À valeurs dans $[0, 1]$:** Comme chaque f_n est à valeurs dans $[0, 1]$ (Q19), par passage à la limite simple, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ est à valeurs dans $[0, 1]$.
- **Croissante :** Une simple récurrence permet de prouver que chaque f_n est croissante (en remarquant que la construction préserve l'ordre sur chaque tiers d'intervalle). La limite d'une suite de fonctions croissantes est croissante. Donc f est croissante.
- **Continue :** Chaque fonction f_n est continue sur $[0, 1]$ (on peut vérifier aisément la continuité aux points de raccord $1/3$ et $2/3$). La suite (f_n) converge uniformément (Q22) vers f. Le théorème de la limite uniforme assure que la fonction limite f est continue sur $[0, 1]$.
- **Surjective :** f est continue sur l'intervalle $[0, 1]$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(0) = 0 \implies f(0) = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(1) = 1 \implies f(1) = 1$. D'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [0, 1]$. La fonction f est donc surjective de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$.