Proposition de Corrigé
Concours Commun INP 2022 – Mathématiques 1 (Filière MP)

EXERCICE

Q1.

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$. La fonction génératrice G_Y de Y est définie pour $|t| < \frac{1}{q}$ par :

$$G_Y(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k)t^k = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}t^k = pt\sum_{k=1}^{+\infty}(qt)^{k-1} = pt\sum_{j=0}^{+\infty}(qt)^j = \frac{pt}{1-qt}$$

L'espérance s'obtient en dérivant la fonction génératrice et en l'évaluant en $t = 1$:

$$G_Y'(t) = \frac{p(1-qt) - pt(-q)}{(1-qt)^2} = \frac{p - pqt + pqt}{(1-qt)^2} = \frac{p}{(1-qt)^2}$$

D'où $E(Y) = G_Y'(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$.

Q2.

Le code est constitué de 4 chiffres choisis parmi 10 (de 0 à 9). Le nombre total de codes possibles est donc $10^4 = 10\,000$. L'expérience consiste à choisir un code uniformément au hasard parmi tous les codes possibles. La probabilité de tomber sur le bon code (qui est unique) est donc $p = \frac{1}{10\,000} = 10^{-4}$.

Q3.

Dans cette stratégie, les tirages s'effectuent **sans remise** parmi les 10 000 codes possibles. La variable X prend ses valeurs dans $1, 10\,000$. Le k-ième essai est le bon si et seulement si les $k-1$ premiers étaient faux et le k-ième est le bon. Cependant, plus simplement, le bon code a la même probabilité d'être placé à n'importe quelle position de la séquence des 10 000 tirages possibles (ordre des essais). Ainsi, X suit une loi uniforme sur $1, 10\,000$. Sa loi est donnée par : $\forall k \in 1, 10\,000$, $P(X=k) = \frac{1}{10\,000}$. Son espérance est $E(X) = \frac{10\,000+1}{2} = 5\,000,5$.

Q4.

Dans cette stratégie, les tirages s'effectuent **avec remise** et de manière indépendante, avec une probabilité de succès constante $p = \frac{1}{10\,000}$. La variable X représente le temps d'attente du premier succès dans un schéma de Bernoulli. X suit donc une loi géométrique de paramètre $p = 10^{-4}$. Son espérance, calculée à la question Q1, est $E(X) = \frac{1}{p} = 10\,000$.

Q5.

Voici le script complété. On initialise le nombre d'essais à 1 (puisqu'un essai a déjà eu lieu avant la boucle), et on redemande le code tant qu'il est faux.

```
code = 4714
n = int(input('Taper un code à 4 chiffres :'))
k = 1
while n != code:
    n = int(input('Taper un code à 4 chiffres :'))
    k += 1
print('Vous avez trouvé le code en '+str(k)+' essais.')
```

Q6.

La fonction Python s'écrit simplement à l'aide d'une liste en compréhension et de l'opérateur modulo `%`.

```
def crypte(m):
    return [(x + 5) % 10 for x in m]
```

PROBLÈME - Intégrales de Fresnel

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Q7.

La fonction $t \mapsto e^{it^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions de classe C^∞. Par le théorème fondamental du calcul intégral, la fonction H, qui est la primitive de $t \mapsto e^{it^2}$ s'annulant en 0, est également de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $H'(x) = e^{ix^2}$.

Q8.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue le changement de variable $u = -t$ (donc $du = -dt$) dans l'intégrale définissant $H(-x)$:

$$H(-x) = \int_0^{-x} e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{i(-u)^2}(-1)\mathrm{d}u = -\int_0^x e^{iu^2}\,\mathrm{d}u = -H(x)$$

La fonction H est donc **impaire**.

Q9.

On connait le développement en série entière de l'exponentielle : $\forall X \in \mathbb{R}$, $e^X = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!}$. En substituant $X = it^2$, on obtient :

$$e^{it^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} t^{2n}$$

Ce développement est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$ (rayon de convergence infini). En intégrant terme à terme cette série entière (ce qui conserve le rayon de convergence), et puisque $H(0) = 0$, on obtient :

$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}$$

Ce développement est valable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Q10.

Soit $x > 0$. Effectuons le changement de variable $u = t^2$ dans l'intégrale définissant $H(x)$. L'application $t \mapsto t^2$ est un C^1-difféomorphisme de $]0, x]$ sur $]0, x^2]$. On a $du = 2t\,dt = 2\sqrt{u}\,dt$, d'où $dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$.

$$H(x) = \int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^2} e^{iu} \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Q11.

Par la relation de Chasles, pour $x > 4\pi^2$ (donc $x^2 > 2\pi$) :

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Effectuons une intégration par parties sur ce segment. Posons $w(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$ et $v'(u) = e^{iu}$. On a $w'(u) = -\frac{1}{2u^{3/2}}$ et $v(u) = -ie^{iu}$.

$$\begin{aligned} H(x) - H(\sqrt{2\pi}) &= \frac{1}{2}\left[-i\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\right]_{2\pi}^{x^2} - \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{x^2} (-ie^{iu})\left(-\frac{1}{2u^{3/2}}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\left(-i\frac{e^{ix^2}}{x} + i\frac{e^{i2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}\,\mathrm{d}u \\ &= -i\frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Q12.

Étudions la limite de l'expression de la question précédente lorsque $x \to +\infty$.

- Le terme "tout intégré" : $\left|-i\frac{e^{ix^2}}{2x}\right| = \frac{1}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
- L'intégrale : On a $\left|\frac{e^{iu}}{u^{3/2}}\right| = \frac{1}{u^{3/2}}$. Or, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, donc d'après les critères de Riemann, l'intégrale $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ est absolument convergente, donc convergente.

Ainsi, le membre de droite de l'égalité de la Q11 admet une limite finie quand $x \to +\infty$. Par conséquent, $\lim_{x\to+\infty} H(x)$ existe et est finie, ce qui prouve que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q13.

Voici une implémentation de la méthode des rectangles (à gauche) en Python.

```
def I(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    S = 0
    for k in range(n):
        S += f(a + k * h)
    return S * h
```

Q14.

```
from cmath import exp

def f_H(t):
    return exp(1j * t**2)

def H(x, n):
    return I(f_H, 0, x, n)
```

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Q15.

Pour le numérateur : $e^{-x^2(t^2-i)} = e^{-x^2t^2}e^{ix^2}$. Son module est $|e^{-x^2t^2}| \times |e^{ix^2}| = e^{-x^2t^2} \times 1 = e^{-x^2t^2}$. Pour le dénominateur : $|t^2 - i| = \sqrt{(t^2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{t^4 + 1}$.

Q16.

Posons $f(x,t) = \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

— **Domination :** D'après Q15, on a $|f(x,t)| = \frac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} = \varphi(t)$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$. En $\pm\infty$, $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^2}$, ce qui est intégrable (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). La fonction φ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Q17.

Soit $(x_n)_n$ une suite divergeant vers $+\infty$. Pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (tout $t \neq 0$), $\lim_{n\to+\infty} e^{-x_n^2t^2} = 0$, donc la suite de fonctions $t \mapsto f(x_n,t)$ converge simplement vers 0 presque partout sur $\mathbb{R}$. La domination $|f(x_n,t)| \leq \varphi(t)$ établie à la question Q16 reste valable. D'après le théorème de convergence dominée (séquentiel), on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_n,t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$. Ceci étant vrai pour toute suite divergeant vers $+\infty$, on conclut que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Par ailleurs, la fonction g est paire car $f(-x,t) = f(x,t)$. On a donc également $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

Q18.

La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à x : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2x(t^2-i)\frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i} = -2xe^{-x^2(t^2-i)}$. Cette dérivée partielle est continue sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. **Domination locale :** Soit $[a,b]$ un segment tel que $0 < a < b$. Pour $x \in [a,b]$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = 2|x|e^{-x^2t^2} \leq 2be^{-a^2t^2} = \psi_a(t)$$

La fonction ψ_a est intégrable sur $\mathbb{R}$ (référence à l'intégrale de Gauss). Ainsi, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Par parité, elle l'est aussi sur $]-\infty,0[$. Donc g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Q19.

En appliquant la formule de Leibniz grâce à la domination de la question précédente :

$$g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2xe^{-x^2(t^2-i)}\,\mathrm{d}t = -2xe^{ix^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$$

Posons le changement de variable affine $u = xt$ (valable car $x > 0$), donc $dt = \frac{du}{x}$.

$$g'(x) = -2xe^{ix^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{x} = -2e^{ix^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}$$

Q20.

Calculons la première intégrale de la décomposition fournie. En mettant sous forme canonique le dénominateur : $t^2 - \sqrt{2}t + 1 = \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$. En posant $u = t - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (donc $dt = du$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 1/2}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{2u^2 + 1}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{(\sqrt{2}u)^2 + 1}du$$
$$= \left[\sqrt{2}\arctan(u\sqrt{2})\right]_{-\infty}^{+\infty} = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi\sqrt{2}$$

De la même manière, par un changement de variable symétrique, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t = \pi\sqrt{2}$.

Pour calculer $g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2-i}\mathrm{d}t$, on intègre la décomposition admise sur $\mathbb{R}$. Les termes de la forme $\frac{2t\pm\sqrt{2}}{t^2\pm\sqrt{2}t+1}$ sont de la forme $\frac{w'(t)}{w(t)}$ dont les primitives sont $\ln|t^2 \pm \sqrt{2}t + 1|$. Evaluées entre $-\infty$ et $+\infty$, ces fonctions logarithmiques tendent vers $+\infty$ avec des équivalents en $2\ln|t|$ qui s'annulent mutuellement (par imparité du numérateur une fois recentré, leurs intégrales sur $\mathbb{R}$ valent 0). Il reste les termes constants aux numérateurs :

$$g(0) = \frac{1-i}{4}\left(0 + i(\pi\sqrt{2}) - 0 + i(\pi\sqrt{2})\right) = \frac{1-i}{4}(2i\pi\sqrt{2}) = \frac{i+1}{2}\pi\sqrt{2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\pi$$

Q21.

En intégrant g' (obtenu en Q19) de 0 à x, avec la continuité de g en 0 (bien que g' n'ait été prouvée que sur $\mathbb{R}^*$, un prolongement continu le garantit ou l'on intègre sur $[\varepsilon, x]$) :

$$g(x) - g(0) = \int_0^x -2\sqrt{\pi}e^{iu^2}\,\mathrm{d}u = -2\sqrt{\pi}H(x) \implies g(x) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\pi - 2\sqrt{\pi}H(x)$$

En passant à la limite quand $x \to +\infty$, puisque $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (Q17) :

$$0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\pi - 2\sqrt{\pi}\lim_{x\to+\infty} H(x) \implies \int_0^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t = \frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}\pi}{2\sqrt{\pi}} = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, on obtient les intégrales de Fresnel :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Partie III - Étude d'une série de fonctions

Q22.

C'est la technique de sommation d'Abel. La formule admise donne :

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n+1})b_n + a_{N+1}b_N - a_1 b_0$$

La suite (b_n) est bornée (disons par M). Comme $\lim a_n = 0$, le terme $a_{N+1}b_N$ tend vers 0. Étudions la série $\sum(a_n - a_{n+1})b_n$. Elle est absolument convergente car :

$$|(a_n - a_{n+1})b_n| \leq M|a_n - a_{n+1}| = M(a_n - a_{n+1}) \quad \text{(car } (a_n) \text{ est décroissante)}$$

Or la série télescopique $\sum(a_n - a_{n+1})$ converge (sa somme partielle vaut $a_1 - a_{N+1} \to a_1$). La somme partielle du membre de droite a donc une limite quand $N \to +\infty$, ce qui assure la convergence de la série $\sum a_n(b_n - b_{n-1})$.

Q23.

On reconnait la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = e^{ix} \neq 1$ (car $x \in]0, 2\pi[$).

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = e^{ix}\frac{e^{i\frac{nx}{2}}\left(e^{-i\frac{nx}{2}} - e^{i\frac{nx}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right)} = e^{ix}e^{i\frac{(n-1)x}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Q24.

Pour $x \in]0, 2\pi[$ fixé, posons $b_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$ avec $b_0 = 0$, et $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. La suite (a_n) est réelle, positive, décroissante et de limite nulle. La suite (b_n) est bornée par $\frac{1}{|\sin(x/2)|}$ d'après l'expression de la Q23. De plus, $b_n - b_{n-1} = e^{inx}$. D'après la Q22, la série de terme général $a_n(b_n - b_{n-1}) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ converge. La fonction S est donc bien définie sur $]0, 2\pi[$.

Q25.

D'après l'expression de $S(x)$ de la question précédente, on peut écrire :

$$\frac{e^{ix} - 1}{ix}S(x) = \frac{e^{ix} - 1}{ix}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ikx}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}}$$

Par ailleurs, la relation de Chasles permet d'écrire l'intégrale sur $[1, +\infty[$ comme la somme des intégrales sur les segments $[k, k+1]$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

La différence s'écrit donc :

$$\frac{e^{ix} - 1}{ix}S(x) - \int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right)$$

En passant à la valeur absolue et en utilisant l'inégalité triangulaire (la série converge) ainsi que l'inégalité admise par l'énoncé :

$$\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x)-\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}}-\int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^{3/2}}$$

La série de terme général $\frac{1}{k^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. En posant $C = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^{3/2}}$ (qui est une constante finie strictement positive indépendante de x), on obtient bien le résultat demandé.

Q26.

Pour $x > 0$, effectuons le changement de variable $u = tx$ dans l'intégrale de $I(x)$. L'application $t \mapsto tx$ est un C^1-difféomorphisme croissant de $[1, +\infty[$ sur $[x, +\infty[$. On a $\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t \implies \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{x}$.

$$\begin{aligned} I(x) &= \sqrt{x}\int_x^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u/x}}\frac{\mathrm{d}u}{x} = \sqrt{x}\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{u}}e^{iu}\frac{\mathrm{d}u}{x} \\ &= \int_x^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers 0^+, cette intégrale tend vers $\int_0^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$. Or, d'après la Q10, $H(y) = \frac{1}{2}\int_0^{y^2}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$, donc $\int_0^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = 2\lim_{y\to+\infty}H(y)$. D'après la Q21, $\lim_{y\to+\infty}H(y) = \int_0^{+\infty}e^{it^2}\mathrm{d}t = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$. On en déduit que :

$$\lim_{x\to0^+}I(x) = 2\times\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)$$

Q27.

Par les développements limités usuels en 0 : $e^{ix}-1 = ix + o(x)$, donc $\frac{e^{ix}-1}{ix} = 1 + o(1)$. La limite de $\frac{e^{ix}-1}{ix}$ en 0^+ est donc 1.

Reprenons l'inégalité de la Q25 et multiplions-la par $\sqrt{x}$ (qui est > 0) :

$$\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}\sqrt{x}S(x)-\sqrt{x}\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right| \leq C\sqrt{x}$$

Ce qui se réécrit :

$$\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}\sqrt{x}S(x)-I(x)\right| \leq C\sqrt{x}$$

Lorsque x tend vers 0^+, le membre de droite $C\sqrt{x}$ tend vers 0. Par le théorème des gendarmes, $\frac{e^{ix}-1}{ix}\sqrt{x}S(x)-I(x)$ tend vers 0. Puisque $\lim_{x\to0^+}I(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)$ (d'après Q26), on a nécessairement :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{ix}-1}{ix}\sqrt{x}S(x)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)$$

Or, on sait que $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ix}-1}{ix} = 1$. On en déduit que :

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}S(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)$$

Finalement, l'équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+ est :

$$S(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}(1+i)$$