

Proposition de Corrigé  
Concours Commun INP 2021 – Mathématiques 1 (Filière MP)

## EXERCICE I

### Q1.

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . La fonction  $t \mapsto t^{2k} \ln t$  est continue sur  $]0, 1[$ . En 0, par croissances comparées,  $\lim_{t \rightarrow 0} t^{2k} \ln t = 0$  (car  $2k \geq 0$ , pour  $k = 0$  on a l'intégrabilité de base du logarithme, et pour  $k \geq 1$  la limite est nulle donc prolongeable par continuité). La fonction est donc intégrable sur  $]0, 1[$ . Procédons à une intégration par parties sur un segment  $[\varepsilon, 1]$  avec  $\varepsilon > 0$ . Posons  $u(t) = \ln t$  et  $v'(t) = t^{2k}$ , d'où  $u'(t) = \frac{1}{t}$  et  $v(t) = \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[\varepsilon, 1]$ .

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 t^{2k} \ln t \, dt &= \left[ \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \ln t \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{t^{2k}}{2k+1} \, dt \\ &= -\frac{\varepsilon^{2k+1} \ln \varepsilon}{2k+1} - \left[ \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)^2} \right]_{\varepsilon}^1 \\ &= -\frac{\varepsilon^{2k+1} \ln \varepsilon}{2k+1} - \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{\varepsilon^{2k+1}}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, par croissances comparées  $\varepsilon^{2k+1} \ln \varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient :

$$I_k = \int_0^1 t^{2k} \ln t \, dt = -\frac{1}{(2k+1)^2}$$

### Q2.

Pour tout  $t \in ]0, 1[$ , on a  $t^2 \in ]0, 1[$ . On peut donc développer  $\frac{1}{1-t^2}$  en série géométrique :

$$f(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1} = -\frac{\ln t}{1 - t^2} = -\ln t \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-t^{2k} \ln t)$$

Posons  $g_k(t) = -t^{2k} \ln t$ .

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction  $g_k$  est continue par morceaux, positive et intégrable sur  $]0, 1[$ .
- La série de fonctions  $\sum g_k$  converge simplement sur  $]0, 1[$  vers la fonction  $f$ , qui est continue.
- La série des intégrales  $\sum \int_0^1 |g_k(t)| \, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-I_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$  est convergente. En effet,  $\frac{1}{(2k+1)^2} \sim \frac{1}{4k^2}$  qui est le terme général d'une série de Riemann convergente ( $\alpha = 2 > 1$ ).

D'après le théorème d'intégration terme à terme (ou théorème de convergence monotone),  $f$  est intégrable sur  $]0, 1[$  et :

$$\int_0^1 f(t) \, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 g_k(t) \, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Or, on sait que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ . D'où  $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \implies \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8}$ . Finalement,  $\int_0^1 f(t) \, dt = \frac{\pi^2}{8}$ .

## EXERCICE II

### Q3.

La fonction  $x \mapsto \ln x$  est deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$ . Sa dérivée seconde est  $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ . Puisque pour tout  $x > 0$ ,  $-\frac{1}{x^2} < 0$ , la fonction  $\ln$  est concave sur  $]0, +\infty[$ . L'inégalité de Jensen pour une fonction concave  $g$  et des points  $x_1, x_2, x_3 \in ]0, +\infty[$  avec des poids  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$  donne :

$$g\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{g(a) + g(b) + g(c)}{3}$$

En appliquant ceci à  $g = \ln$  :

$$\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} = \frac{1}{3} \ln(abc) = \ln\left((abc)^{\frac{1}{3}}\right)$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on compose l'inégalité pour obtenir :

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

### Q4.

La fonction  $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$  est de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $]0, +\infty[^2$ . Ses points critiques annulent le gradient :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 - \frac{1}{x^2 y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 - \frac{1}{xy^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 y = 1 \\ xy^2 = 1 \end{cases}$$

Par quotient (puisque  $x, y > 0$ ), on obtient  $\frac{x}{y} = 1 \implies x = y$ . En remplaçant dans la première équation :  $x^3 = 1 \implies x = 1$  (car  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ). Le seul point critique sur l'ouvert est donc  $A(1, 1)$ .

Démontrons qu'il s'agit d'un minimum global. En utilisant l'inégalité de la Q3 avec  $a = x$ ,  $b = y$  et  $c = \frac{1}{xy}$  (qui sont tous strictement positifs) :

$$\frac{x + y + \frac{1}{xy}}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot y \cdot \frac{1}{xy}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

On en déduit que pour tout  $(x, y) \in ]0, +\infty[^2$ ,  $f(x, y) \geq 3$ . Or,  $f(1, 1) = 1 + 1 + 1 = 3$ . La fonction  $f$  admet donc un minimum global au point  $(1, 1)$  qui vaut 3.

## PROBLÈME

### Partie I - Algorithmique

#### Q5.

```
def factorielle(n):
    res = 1
    for i in range(2, n + 1):
        res = res * i
    return res
```

### Q6.

La fonction `factorielle(k)` effectue  $k - 1$  multiplications (si on l'écrit comme ci-dessus). Lors de l'appel de `binom(30, 10)`, on calcule :

- `factorielle(30)` : 29 multiplications.
- `factorielle(10)` : 9 multiplications.
- `factorielle(20)` : 19 multiplications.
- La multiplication des deux factorielles au dénominateur : 1 multiplication.

Le nombre total de multiplications est donc  $29 + 9 + 19 + 1 = 58$ . (On ne compte pas ici la division entière `'/'`).

Il est possible de réduire ce nombre à 20 en remarquant que  $\binom{30}{10} = \frac{30 \times 29 \times \dots \times 21}{10 \times 9 \times \dots \times 1}$ . Le numérateur nécessite 9 multiplications et le dénominateur 9 multiplications, plus 1 division, soit nettement moins d'opérations si l'algorithme est optimisé. Si l'on remplaçait `//` par `/`, la fonction renverrait un nombre de type `float` au lieu de `int`, ce qui pourrait poser des problèmes de précision pour de très grands entiers.

### Q7.

Pour  $n \geq p \geq 1$  :

$$\frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} = \frac{n}{p} \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = \frac{n(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

Fonction récursive en Python :

```
def binom_rec(n, p):
    if p == 0 or p == n:
        return 1
    if p < 0 or p > n:
        return 0
    return (n // p) * binom_rec(n - 1, p - 1)
# Attention: pour rester entier avec certitude d'arrondi:
# return (n * binom_rec(n - 1, p - 1)) // p
```

### Q8.

D'après la définition,  $b_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$ .

```
def bernoulli(n):
    b = [1.0] # b[0] = 1
    for m in range(1, n + 1):
        somme = 0
        for k in range(m):
            somme += binom(m + 1, k) * b[k]
        b_m = - somme / (m + 1)
        b.append(b_m)
    return b[n]
```

## Partie II - Généralités sur la fonction zêta

### Q9.

Soit  $a > 1$ . On pose  $u_n = \frac{\ln n}{n^a}$ . Considérons un réel  $c$  tel que  $1 < c < a$ . Par croissances comparées,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^c \frac{\ln n}{n^a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^{a-c}} = 0$  (car  $a - c > 0$ ). Ainsi,  $u_n = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$ . Puisque  $c > 1$ , la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^c}$  converge. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum \frac{\ln n}{n^a}$  converge.

**Q10.**

Soit  $f_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$ . La fonction  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et  $f'_n(x) = -\frac{\ln n}{n^x}$ .

— La série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $]1, +\infty[$ .

— Soit  $[a, +\infty[$  un segment inclus dans  $]1, +\infty[$  ( $a > 1$ ). Pour tout  $x \geq a$ , on a  $|f'_n(x)| = \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a}$ . D'après Q9, la série numérique  $\sum \frac{\ln n}{n^a}$  converge. La série des dérivées  $\sum f'_n$  converge donc normalement (et donc uniformément) sur tout segment de  $]1, +\infty[$ .

D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions,  $\zeta$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et  $\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\ln n}{n^x}$ . Comme tous les termes de la somme définissant la dérivée sont strictement négatifs pour  $n \geq 2$ , on a  $\zeta'(x) < 0$ . La fonction  $\zeta$  est strictement décroissante sur  $]1, +\infty[$ .

**Q11.**

La série  $\sum f_n$  ne converge pas uniformément sur  $]1, +\infty[$ . En effet, si elle convergerait uniformément, le critère de Cauchy uniforme (ou la limite du reste) s'appliquerait. Or, le supremum du terme général sur  $]1, +\infty[$  est  $\sup_{x>1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$ . La série des normes infinies  $\sum \frac{1}{n}$  diverge (série harmonique), ce qui implique qu'il n'y a pas convergence normale. De plus,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$ , ce qui empêche la convergence uniforme sur  $]1, +\infty[$ .

**Q12.**

Sur l'intervalle  $[2, +\infty[$ , on a la domination  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ . La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente. La série de fonctions converge donc normalement sur  $[2, +\infty[$ . D'après le théorème d'interversion limite-série (chaque  $f_n$  admet une limite en  $+\infty$ ) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$$

**Q13.**

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^x}$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ . Pour tout entier  $k \geq 1$  et pour tout  $t \in [k, k+1]$  :

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$$

En intégrant sur  $[k, k+1]$  :

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$$

En sommant de  $k = 1$  à  $n - 1$  et en passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  :

$$\zeta(x) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) \implies I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1$$

Or  $I(x) = \left[ \frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$  (car  $x > 1$ ). Ainsi  $\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1$ . En multipliant par  $(x-1)$

on trouve que  $(x-1)\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 1$ , donc  $\zeta(x) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$ .

**Q14.**

La famille  $(\frac{1}{(ab)^x})_{(a,b) \in A}$  est à termes positifs. Comme  $\sum_{a=1}^{+\infty} \frac{1}{a^x}$  converge vers  $\zeta(x)$  et  $\sum_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{b^x}$  converge vers  $\zeta(x)$ , le produit de Cauchy (ou Fubini pour les familles sommables à termes positifs) garantit que la famille est sommable et que la somme vaut  $\zeta(x) \times \zeta(x) = \zeta(x)^2$ . En sommant

par paquets sur les ensembles  $A_n = \{(a, b) \in A \mid ab = n\}$ , le nombre d'éléments de  $A_n$  est exactement  $d_n$  (le nombre de diviseurs de  $n$ ).

$$\zeta(x)^2 = \sum_{(a,b) \in A} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}$$

### Partie III - Produit eulérien

#### Q15.

Les événements  $(X = ak)$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$  sont deux à deux disjoints.

$$P(X \in a\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ak) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)(ak)^s} = \frac{1}{a^s \zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{a^s \zeta(s)} \zeta(s) = \frac{1}{a^s}$$

#### Q16.

C'est une propriété classique d'arithmétique (lemme de Gauss). **Initialisation :** Pour  $n = 1$ ,  $a_1 | N \iff a_1 | N$ . **Hérédité :** Supposons la propriété vraie pour  $n - 1$ . Si  $(a_1 | N, \dots, a_n | N)$ , alors d'après l'hypothèse de récurrence  $K = a_1 \dots a_{n-1} | N$ . Donc  $N = qK$ . De plus  $a_n | N \implies a_n | qK$ . Or  $a_n$  est premier avec chaque  $a_i$ , donc il est premier avec leur produit  $K$ . D'après le lemme de Gauss,  $a_n | q$ , donc  $N = a_n q' K$ , ce qui prouve que  $(a_1 \dots a_n) | N$ . La propriété est fautive si les entiers sont seulement premiers dans leur ensemble. Contre-exemple :  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 6$ . Le PGCD de  $(2, 3, 6)$  est 1. Mais  $2|6, 3|6, 6|6$ , or  $2 \times 3 \times 6 = 36$  ne divise pas 6.

#### Q17.

Soient  $(a_1, \dots, a_n)$  premiers entre eux deux à deux.  $P(X \in a_1 \mathbb{N}^* \cap \dots \cap a_n \mathbb{N}^*) = P(X \text{ est multiple de chaque } a_i)$ . D'après Q16, ceci équivaut à être multiple du produit  $a_1 a_2 \dots a_n$ . Donc  $P(X \in (a_1 \dots a_n) \mathbb{N}^*) = \frac{1}{(a_1 \dots a_n)^s}$  (d'après Q15). Or  $\frac{1}{(a_1 \dots a_n)^s} = \frac{1}{a_1^s} \times \dots \times \frac{1}{a_n^s} = P(X \in a_1 \mathbb{N}^*) \dots P(X \in a_n \mathbb{N}^*)$ . La relation est vraie pour toute sous-famille, ce qui caractérise l'indépendance mutuelle.

#### Q18.

L'événement  $B_n$  est l'intersection des complémentaires des événements  $A_k = [X \in p_k \mathbb{N}^*]$  pour  $k = 1 \dots n$ . Les nombres premiers  $p_k$  étant premiers entre eux deux à deux, les événements  $A_k$  sont mutuellement indépendants. Leurs complémentaires le sont aussi.

$$P(B_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right) = \prod_{k=1}^n P(\overline{A_k}) = \prod_{k=1}^n (1 - P(A_k)) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$$

#### Q19.

Si  $\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$ , alors  $X(\omega)$  n'est divisible par aucun nombre premier. Le seul entier naturel non nul n'admettant aucun diviseur premier est 1. Donc  $X(\omega) = 1$ . Par continuité décroissante des probabilités,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = P(X = 1) = \frac{1}{\zeta(s) \cdot 1^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$ . On en déduit :

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) \implies \zeta(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

**Q20.**

On pose  $u_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$ . Supposons que  $\sum \frac{1}{p_k}$  converge. Alors  $\ln(1 - \frac{1}{p_k}) \sim -\frac{1}{p_k}$  est le terme général d'une série convergente. Le logarithme du produit converge, donc la suite  $(u_n)$  converge vers une limite finie  $l > 0$ . Pour tout  $s > 1$ , on a  $\frac{1}{p_k} > \frac{1}{p_k^s}$ , donc  $1 - \frac{1}{p_k} < 1 - \frac{1}{p_k^s}$ , ce qui implique  $\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} > \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$ . En passant au produit et à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient  $l \geq \zeta(s)$ . Cependant, d'après Q13,  $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = +\infty$ . On aurait donc  $l \geq +\infty$  avec  $l$  réel fini, ce qui est absurde. Conclusion : la série  $\sum \frac{1}{p_n}$  est divergente.

axi-om.fr