

Proposition de Corrigé
Concours Commun INP 2025 – Mathématiques 1 (Filière MP)

EXERCICE I

Q1.

L'application f est de classe C^1 sur $I =]-1, 1[$, ce qui signifie par définition que sa dérivée f' est une application continue sur I . L'intervalle $I =]-1, 1[$ est une partie connexe par arcs de \mathbb{R} . Or, l'image d'un connexe par arcs par une application continue est un connexe par arcs. Par conséquent, $f'(] - 1, 1[)$ est une partie connexe par arcs de \mathbb{R}^2 .

Q2.

a) Dérivabilité en 0 et sur $] - 1, 1[$:

— **En 0 :** On étudie le taux d'accroissement de f en 0. Pour tout $t \in] - 1, 1[\setminus \{0\}$, on a :

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \left(t \sin \frac{1}{t}, t \cos \frac{1}{t} \right)$$

On évalue sa norme : $\left\| \frac{f(t) - f(0)}{t} \right\|_2 = \sqrt{t^2 \sin^2 \left(\frac{1}{t} \right) + t^2 \cos^2 \left(\frac{1}{t} \right)} = \sqrt{t^2} = |t|$. Comme $\lim_{t \rightarrow 0} |t| = 0$, on en déduit que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = (0, 0)$. Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = (0, 0)$.

— **Sur $] - 1, 0[$ et $] 0, 1[$:** L'application f est composée de fonctions usuelles dérivables sur ces intervalles. Elle y est donc dérivable. En dérivant chaque composante pour $t \neq 0$, on obtient en utilisant la formule $(uv)' = u'v + uv'$ et la dérivée de $t \mapsto 1/t$:

$$f'(t) = \left(2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}, 2t \cos \frac{1}{t} + \sin \frac{1}{t} \right)$$

b) Minorant de la norme et connexité par arcs : Pour tout $t \in] 0, 1[$ (et par symétrie pour $t \in] - 1, 0[$), calculons la norme de $f'(t)$:

$$\|f'(t)\|_2^2 = \left(2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t} \right)^2 + \left(2t \cos \frac{1}{t} + \sin \frac{1}{t} \right)^2$$

En développant, on trouve :

$$\|f'(t)\|_2^2 = 4t^2 \sin^2 \frac{1}{t} - 4t \sin \frac{1}{t} \cos \frac{1}{t} + \cos^2 \frac{1}{t} + 4t^2 \cos^2 \frac{1}{t} + 4t \cos \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t} + \sin^2 \frac{1}{t}$$

Ce qui se simplifie, via $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, en :

$$\|f'(t)\|_2^2 = 4t^2 + 1$$

Puisque $t > 0$, $4t^2 > 0$ d'où $\|f'(t)\|_2 = \sqrt{4t^2 + 1} > 1$. Ainsi $\forall t \in] 0, 1[$, $\|f'(t)\|_2 \geq 1$.

L'ensemble image $f'([-1, 1])$ contient l'origine $(0, 0)$ puisque $f'(0) = (0, 0)$, dont la norme est 0. Il contient également des points de norme strictement supérieure à 1 (par exemple $f'(1/2)$). Cependant, pour tout $t \in]-1, 1[$, $\|f'(t)\|_2$ ne prend jamais de valeur strictement comprise entre 0 et 1 (puisque pour $t \neq 0$, la norme est > 1). Supposons par l'absurde que $f'([-1, 1])$ soit connexe par arcs dans \mathbb{R}^2 . L'application norme $\|\cdot\|_2$ étant continue, l'image de ce connexe par la norme devrait être un connexe de \mathbb{R} , c'est-à-dire un intervalle. Cet intervalle contiendrait 0 et une valeur > 1 , il devrait donc contenir la valeur $\frac{1}{2}$ par le théorème des valeurs intermédiaires. Or ce n'est pas le cas. En conclusion, $f'([-1, 1])$ n'est pas connexe par arcs. (*Remarque : ceci démontre que la fonction f de cette question n'est pas de classe C^1 , contrairement à l'hypothèse générale de la question 1*).

EXERCICE II

Q3. Première méthode

La fonction $f(x, y) = (2 - x - y)^2 + (1 - x)^2 + (1 - 2x - y)^2$ est polynomiale donc de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 . Cherchons les points critiques en annulant le gradient. Les dérivées partielles sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -2(2 - x - y) - 2(1 - x) - 4(1 - 2x - y) = -4 + 2x + 2y - 2 + 2x - 4 + 8x + 4y \\ &= 12x + 6y - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2(2 - x - y) - 2(1 - 2x - y) = -4 + 2x + 2y - 2 + 4x + 2y \\ &= 6x + 4y - 6 \end{aligned}$$

Le point critique vérifie le système :

$$\begin{cases} 12x + 6y = 10 & \iff 6x + 3y = 5 \\ 6x + 4y = 6 \end{cases}$$

En soustrayant la première équation à la deuxième, on obtient $(6x + 4y) - (6x + 3y) = 6 - 5$, soit $y = 1$. En remplaçant dans la première : $6x + 3(1) = 5 \implies 6x = 2 \implies x = \frac{1}{3}$. Le seul point critique est donc $A(\frac{1}{3}, 1)$.

Étudions la matrice Hessienne de f en ce point :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$$

La matrice Hessienne est $H = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. On a $\det(H) = 12 \times 4 - 6 \times 6 = 48 - 36 = 12 > 0$, et

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12 > 0$. Ces deux conditions strictes assurent que f admet un minimum local au point A .

En admettant qu'il est global, la valeur de ce minimum est :

$$f\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \left(2 - \frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3} - 1\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Le minimum est de $\frac{4}{3}$.

Q4. Deuxième méthode

Soient $a = (2, 1, 1)$, $u = (1, 1, 2)$ et $v = (1, 0, 1)$. On remarque que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a le vecteur $xu + yv = (x + y, x, 2x + y)$. La distance au carré entre a et $xu + yv$ est :

$$\|a - (xu + yv)\|^2 = (2 - (x + y))^2 + (1 - x)^2 + (1 - (2x + y))^2 = f(x, y)$$

Minimiser $f(x, y)$ sur \mathbb{R}^2 revient donc à trouver la distance minimale entre a et l'espace vectoriel $F = \text{Vect}(u, v)$. D'après le théorème de la projection orthogonale, ce minimum est atteint pour $b = p_F(a)$, le projeté orthogonal de a sur F . Par caractérisation du projeté orthogonal, le vecteur $a - b$ est orthogonal à F , ce qui signifie qu'il est orthogonal à toute base de F , d'où :

$$\langle a - b \mid u \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle a - b \mid v \rangle = 0$$

Posons $b = \lambda u + \mu v$. Les conditions d'orthogonalité donnent :

$$\begin{aligned} \langle a - (\lambda u + \mu v) \mid u \rangle = 0 &\implies \lambda \|u\|^2 + \mu \langle u \mid v \rangle = \langle a \mid u \rangle \\ \langle a - (\lambda u + \mu v) \mid v \rangle = 0 &\implies \lambda \langle u \mid v \rangle + \mu \|v\|^2 = \langle a \mid v \rangle \end{aligned}$$

Calculons les différents produits scalaires :

- $\|u\|^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$
- $\|v\|^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2$
- $\langle u \mid v \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 3$
- $\langle a \mid u \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5$
- $\langle a \mid v \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 3$

Le système à résoudre est donc :

$$\begin{cases} 6\lambda + 3\mu = 5 \\ 3\lambda + 2\mu = 3 \end{cases}$$

C'est exactement le même système qu'à la question Q3 (avec $\lambda = x, \mu = y$). La solution est $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\mu = 1$. On en déduit le vecteur b :

$$b = \frac{1}{3}u + v = \left(\frac{1}{3} + 1, \frac{1}{3} + 0, \frac{2}{3} + 1 \right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

La valeur minimale de f est $\|a - b\|^2$. On calcule $a - b = \left(2 - \frac{4}{3}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{5}{3} \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$. Ainsi, le minimum de f est $\|a - b\|^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

PROBLÈME

Partie I - Théorème de comparaison avec une intégrale

Q5.

- $S_n - S_{n-1} = f(n)$. Or f est positive sur \mathbb{R}^+ , donc $f(n) \geq 0$, ce qui implique que **la suite (S_n) est croissante**.
- $J_n - J_{n-1} = \int_{n-1}^n f(t) dt$. Comme $f \geq 0$, par positivité de l'intégrale (bornes croissantes), $\int_{n-1}^n f(t) dt \geq 0$. Donc **la suite (J_n) est croissante**.
- Soit un entier $k \geq 1$. Pour tout $t \in [k-1, k]$, comme f est décroissante, on a $f(k) \leq f(t) \leq f(k-1)$. En intégrant cette double inégalité sur le segment $[k-1, k]$ de longueur 1, la croissance de l'intégrale donne :

$$\int_{k-1}^k f(k) dt \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dt \implies f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$$

Q6.

Sommons les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k-1)$$

Par la relation de Chasles, $\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt = \int_0^n f(t) dt = J_n$. Le terme de gauche est $S_n - f(0)$. Le terme de droite est $\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$. On obtient donc bien l'encadrement pour tout $n \geq 1$: $S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}$.

Q7.

(1) Équivalence d'intégrabilité et de convergence de série :

- Si f est intégrable sur \mathbb{R}^+ , cela signifie que $t \mapsto \int_0^t f$ admet une limite finie en $+\infty$. Donc la suite croissante (J_n) est majorée (elle converge vers l'intégrale de f). D'après Q6, $S_n \leq J_n + f(0)$, donc la suite croissante (S_n) est majorée. Étant croissante et majorée, elle converge. Donc la série $\sum f(n)$ converge.
- Réciproquement, si la série $\sum f(n)$ converge, la suite de ses sommes partielles (S_n) est majorée. D'après Q6, pour tout n , $J_n \leq S_{n-1} \leq \lim S_n$. La suite (J_n) est donc majorée. Étant croissante, elle converge. La fonction continue, positive $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ est croissante et la suite $F(n) = J_n$ converge, ce qui suffit pour affirmer que la limite de F en $+\infty$ existe et est finie (car pour $x \in [n, n+1]$, $F(x) \leq F(n+1) \leq \lim J_n$). Ainsi f est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

(2) Convergence de la série d'écart : Posons $u_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$. D'après Q5, $f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt \leq f(n-1)$. On en déduit que $0 \leq u_n \leq f(n-1) - f(n)$. La série de terme général $v_n = f(n-1) - f(n)$ est une série télescopique dont la somme partielle vaut $\sum_{k=1}^N v_k = f(0) - f(N)$. Comme f est décroissante et minorée par 0, elle admet une limite en $+\infty$. La suite des sommes partielles converge, donc la série $\sum v_n$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs ($0 \leq u_n \leq v_n$), on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \left[\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right]$ converge.

Q8. Un exemple

Soit $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ pour $x \geq 2$ et $\alpha > 0$. **a)** $x \mapsto x$ est croissante positive sur $[2, +\infty[$, $x \mapsto \ln x$ est croissante et > 0 sur $[2, +\infty[$. Donc, comme $\alpha > 0$, $x \mapsto x(\ln x)^\alpha$ est croissante et strictement positive. Son inverse f est donc décroissante et positive. Calculons l'intégrale. On pose le changement de variable $u = \ln t \implies du = \frac{dt}{t}$:

$$\int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^\alpha} dt = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{u^\alpha} du$$

— Si $\alpha \neq 1$, cette intégrale vaut $\left[\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{\ln 2}^{\ln x} = \frac{(\ln x)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

— Si $\alpha = 1$, elle vaut $[\ln u]_{\ln 2}^{\ln x} = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2)$.

En passant à la limite quand $x \rightarrow +\infty$: Si $\alpha > 1$, la puissance $1 - \alpha$ est strictement négative, donc $(\ln x)^{1-\alpha} \rightarrow 0$. L'intégrale admet une limite finie $\frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$. Si $\alpha \leq 1$, l'intégrale diverge vers $+\infty$. D'après la question Q7(1) (adaptée à un intervalle débutant à 2 au lieu de 0), la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ est de même nature que l'intégrale de f , c'est-à-dire qu'elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

b) Dans le cas $\alpha = 2$ (qui converge car $2 > 1$), on utilise l'encadrement classique découlant de la comparaison série-intégrale. Pour tout $k \geq 3$, on a $\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$. En sommant pour k allant de 3 à l'infini (les intégrales convergent) :

$$\int_3^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=3}^{+\infty} f(n) \leq \int_2^{+\infty} f(t) dt$$

On sait que $\int_2^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^x = \frac{1}{\ln 2}$. De plus, $\int_3^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{\ln 3}$. On ajoute $f(2) = \frac{1}{2(\ln 2)^2}$ à tous les termes pour reformer la somme complète à partir de $n = 2$:

$$\frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{2(\ln 2)^2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2(\ln 2)^2}$$

(Une variante plus directe venant des encadrements de Q6, $\sum_{k=2}^N f(k) \geq \int_2^N f(t) dt \implies \sum_{n=2}^{+\infty} f(n) \geq \frac{1}{\ln 2}$). Un encadrement valide est donc $\frac{1}{\ln 2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2(\ln 2)^2}$.

Q9. Une application

$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$. **a)** Considérons la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$. Elle est continue, positive, décroissante. D'après Q7(2) (décalé à $n \geq 2$), la série $\sum_{k \geq 2} \left[\int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt - \frac{1}{k} \right]$ converge. Or, le terme général de cette série est $v_k = \ln(k) - \ln(k-1) - \frac{1}{k}$. La somme partielle de cette série est :

$$\sum_{k=2}^n v_k = \sum_{k=2}^n (\ln k - \ln(k-1)) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

Le premier terme est une somme télescopique qui vaut $\ln n - \ln 1 = \ln n$. Ainsi, $\sum_{k=2}^n v_k = \ln n - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1\right) = 1 - T_n$. Comme la série de terme général v_k converge, la suite de ses sommes partielles converge vers un réel. Par conséquent, la suite (T_n) converge. On note γ sa limite.

b) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \gamma$, on peut écrire $T_n = \gamma + o(1)$. Par définition de T_n , on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \gamma + o(1) \implies \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$, la constante γ et la fonction $o(1)$ sont négligeables devant $\ln n$. En divisant par $\ln n$, on a $\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} = 1 + \frac{\gamma}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$. On en déduit l'équivalent :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$$

Q10. Une application sur une série de fonctions

$g_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$ pour $x \in]0, +\infty[$. **a)** La fonction g_n est dérivable sur $]0, +\infty[$: $g'_n(x) = \frac{1 \cdot (n^2+x^2) - x \cdot 2x}{(n^2+x^2)^2} = \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$. Sur \mathbb{R}^+ , la fonction g_n est strictement croissante sur $[0, n]$ et strictement décroissante sur $[n, +\infty[$. Elle atteint son maximum en $x = n$. Ce maximum vaut $\|g_n\|_{\infty}^{]0, +\infty[} = g_n(n) = \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2n}$. Or, la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n}$ est une série harmonique divergente. La série $\sum_{n \geq 1} \|g_n\|_{\infty}$ diverge donc. La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ ne converge donc pas normalement sur $]0, +\infty[$.

b) Pour x fixé > 0 , soit $f(t) = \frac{x}{t^2+x^2}$ sur \mathbb{R}^+ . f est dérivable, et de dérivée $f'(t) = \frac{-2tx}{(t^2+x^2)^2} \leq 0$ sur \mathbb{R}^+ . Donc f est positive et décroissante. D'après Q5, pour tout $k \geq 1$, $\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$. En sommant ces inégalités de $k = 1$ à n :

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt$$

Par la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt$$

c) Une primitive de $t \mapsto \frac{x}{t^2+x^2}$ est $t \mapsto \arctan\left(\frac{t}{x}\right)$. Calculons les intégrales de l'encadrement :

$$\int_1^{n+1} f(t) dt = \arctan\left(\frac{n+1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\int_0^n f(t) dt = \arctan\left(\frac{n}{x}\right) - \arctan(0) = \arctan\left(\frac{n}{x}\right)$$

L'encadrement devient :

$$\arctan\left(\frac{n+1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sum_{k=1}^n g_k(x) \leq \arctan\left(\frac{n}{x}\right)$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, comme $x > 0$, $\frac{n}{x} \rightarrow +\infty$ et $\frac{n+1}{x} \rightarrow +\infty$, donc les termes en \arctan tendent vers $\frac{\pi}{2}$. L'encadrement passe à la limite (la série convergente de termes positifs) et devient :

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

d) Cherchons la limite quand $x \rightarrow +\infty$. On a l'encadrement précédent valable pour tout $x > 0$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2}$$

Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ convergeait uniformément sur $]0, +\infty[$, alors par le théorème d'interversion des limites (puisque chaque g_n admet une limite finie en $+\infty$), on aurait :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$$

Or, pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^2+x^2} = 0$. La somme vaudrait donc 0. Or, $\frac{\pi}{2} \neq 0$. C'est une contradiction. Par conséquent, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

Partie II - Contre-exemples

Q11.

Soit $f(x) = |\sin(2\pi x)|$ sur $[1, +\infty[$. a) Soit n un entier naturel non nul. Effectuons le changement de variable $u = 2\pi t$ d'où $dt = \frac{du}{2\pi}$.

$$\int_n^{n+1} |\sin(2\pi t)| dt = \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} |\sin u| \frac{du}{2\pi}$$

La fonction $u \mapsto |\sin u|$ est périodique de période π . L'intervalle d'intégration est d'amplitude 2π , ce qui représente 2 périodes complètes. L'intégrale sur un tel intervalle est indépendante de l'origine de l'intervalle et vaut l'intégrale sur 2 périodes centrées en 0, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2\pi} \times 2 \int_0^\pi \sin u \, du = \frac{1}{\pi} [-\cos u]_0^\pi = \frac{1}{\pi} (1 - (-1)) = \frac{2}{\pi}$$

b) Soit $x \in [1, +\infty[$. Posons $N = \lfloor x \rfloor$. Alors N est un entier tel que $1 \leq N \leq x$. L'intégrande $f(t)$ étant positive, l'intégrale sur $[1, x]$ est supérieure à l'intégrale sur l'intervalle $[1, N]$ inclus dans $[1, x]$. Par la relation de Chasles :

$$\int_1^x |\sin(2\pi t)| \, dt \geq \int_1^N f(t) \, dt = \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} f(t) \, dt$$

D'après la question précédente, chaque intégrale vaut $\frac{2}{\pi}$. Il y a $(N-1)$ termes dans cette somme. Ainsi :

$$\int_1^x |\sin(2\pi t)| \, dt \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} (N-1) = \frac{2}{\pi} (\lfloor x \rfloor - 1)$$

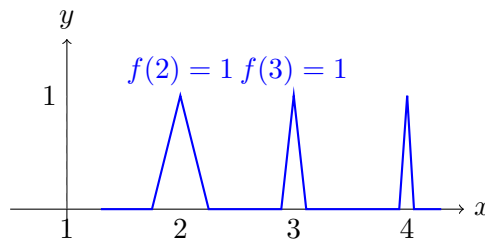
Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $\lfloor x \rfloor \rightarrow +\infty$, donc le minorant tend vers $+\infty$. L'intégrale $\int_1^x f(t) \, dt$ diverge donc vers $+\infty$. Ainsi, la fonction f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. Cependant, pour tout entier $n \geq 1$, on a $f(n) = |\sin(2\pi n)| = 0$. Par conséquent, la série numérique $\sum_{n \geq 1} f(n)$ est la série nulle, elle converge (de somme 0). Ceci prouve que l'hypothèse de *décroissance* dans le théorème (Partie I) est indispensable pour avoir l'équivalence entre convergence de l'intégrale et de la série.

Q12.

On veut construire f continue, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$, mais telle que $\sum f(n)$ diverge. Pour que l'aire du triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ (de largeur $2a_n$) et de hauteur 1 soit égale à $\frac{1}{n^2}$, il faut :

$$\text{Aire} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{2a_n \times 1}{2} = a_n$$

On choisit donc $a_n = \frac{1}{n^2}$. Pour $n \geq 2$, on a $a_n = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{4}$. Ainsi $n + a_n < n + 1 - a_{n+1}$, ce qui garantit que les triangles sont disjoints pour $n \geq 2$. (Pour simplifier la géométrie, on convient de l'allure ci-dessous).



Démonstration du contre-exemple :

- Par construction, pour tout entier $n \geq 2$, $f(n) = 1$. (Même en incluant $n = 1$, on impose $f(1) = 1$). Ainsi le terme général de la série $\sum f(n)$ ne tend pas vers 0. Par conséquent, la série $\sum f(n)$ diverge grossièrement vers $+\infty$.

— Étudions l'intégrabilité de f . L'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ correspond à la somme des aires des triangles (puisque f est nulle partout ailleurs). L'intégrale sur le domaine complet, comme les supports $[n - a_n, n + a_n]$ sont d'intérieur disjoint, s'écrit :

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Aire}(T_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Or, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est bien connue et convergente. Par positivité de f , la fonction est donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

Cette fonction fournit bien le contre-exemple souhaité.