

Proposition de Corrigé  
Concours Commun INP 2021 – Mathématiques 2 (Filière MP)

## EXERCICE

### Q1.

L'espace  $D_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices diagonales. Le produit scalaire canonique sur  $M_n(\mathbb{R})$  est  $\langle A|B \rangle = \text{Tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}B_{i,j}$ . Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . La matrice  $A$  appartient à l'orthogonal  $(D_n(\mathbb{R}))^\perp$  si et seulement si pour toute matrice diagonale  $D \in D_n(\mathbb{R})$ , on a  $\langle A|D \rangle = 0$ . Puisque  $D_{i,j} = 0$  pour  $i \neq j$ , cette condition s'écrit  $\sum_{i=1}^n A_{i,i}D_{i,i} = 0$ . En choisissant pour  $D$  la matrice élémentaire  $E_{k,k}$  (qui a un 1 à la position  $(k, k)$  et des zéros ailleurs, et qui est bien diagonale), on obtient  $A_{k,k} = 0$ , et ce pour tout  $k \in 1, n$ . L'orthogonal  $(D_n(\mathbb{R}))^\perp$  est donc l'ensemble des matrices dont la **diagonale principale est nulle**.

## PROBLÈME - Théorème de décomposition de Dunford

### Partie I - Quelques exemples

#### Q2.

- Si  $A$  est **diagonalisable**, elle s'écrit  $A = A + 0$ . Comme  $A$  est diagonalisable et que 0 est nilpotente, et qu'elles commutent ( $A \times 0 = 0 \times A = 0$ ), l'unicité de la décomposition donne  $D = A$  et  $N = 0$ .
- Si  $A$  est **nilpotente**, elle s'écrit  $A = 0 + A$ . Comme 0 est diagonalisable et  $A$  est nilpotente, et qu'elles commutent, la décomposition est  $D = 0$  et  $N = A$ .

Toute matrice trigonalisable sur  $K$  possède un polynôme caractéristique scindé sur  $K$  (puisqu'elle est semblable à une matrice triangulaire dont la diagonale contient les valeurs propres dans  $K$ ). Elle vérifie donc bien l'hypothèse du théorème et admet une décomposition de Dunford.

Considérons le couple  $(D, N) = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$  pour la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Vérifions la condition (4) de commutation :

$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ND = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que  $DN \neq ND$ . Ce couple ne satisfait pas la condition de commutation, ce n'est donc **pas** la décomposition de Dunford de  $A$ . (En réalité,  $A$  ayant deux valeurs propres distinctes 1 et 2, elle est diagonalisable, donc son couple est  $(A, 0)$ ).

#### Q3.

Une matrice de  $M_2(\mathbb{R})$  n'admet pas de décomposition de Dunford dans  $M_2(\mathbb{R})$  si et seulement si son polynôme caractéristique n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ . Il suffit de prendre une matrice

représentant une rotation d'angle  $\theta \not\equiv 0[\pi]$ , par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est  $\chi_A(X) = X^2 + 1$ , qui n'a pas de racine réelle.

#### Q4.

Calculons le polynôme caractéristique de  $A$  :

$$\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -8 \\ -3 & X+1 & -6 \\ 2 & 0 & X+5 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième colonne :

$$\chi_A(X) = (X+1) \begin{vmatrix} X-3 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} = (X+1)((X-3)(X+5)+16) = (X+1)(X^2+2X+1) = (X+1)^3$$

D'après le théorème, la matrice  $D$  a le même polynôme caractéristique  $\chi_D = (X+1)^3$ . Puisque  $D$  est diagonalisable, elle est semblable à la matrice diagonale constituée de ses valeurs propres, c'est-à-dire  $-I_3$ . Or, l'unique matrice semblable à une matrice scalaire est la matrice scalaire elle-même. On a donc  $D = -I_3$ . On en déduit  $N = A - D = A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ . (On vérifie

rapidement que  $N^2 = 0$ , elle est bien nilpotente, et elle commute évidemment avec  $D = -I_3$ ). Le couple est donc  $(-I_3, A + I_3)$ .

#### Q5.

Les matrices  $D$  et  $N$  commutent, donc  $\exp(A) = \exp(D + N) = \exp(D)\exp(N)$ .

—  $D = -I_3$ , donc  $\exp(D) = e^{-1}I_3$ .

—  $N$  est nilpotente d'indice 2 ( $N^2 = 0$ ), donc  $\exp(N) = I_3 + N + \frac{N^2}{2!} + \dots = I_3 + N$ .

$$\text{D'où } \exp(A) = e^{-1}(I_3 + N) = e^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

#### Q6.

Puisque  $A^2(A - I_n) = 0$ , on a  $A^3 = A^2$ . Soit le polynôme  $P(X) = X(X - 1) = X^2 - X$ . Évalué en  $A^2$ , cela donne  $P(A^2) = (A^2)^2 - A^2 = A^4 - A^2$ . Puisque  $A^3 = A^2$ , en multipliant par  $A$  on a aussi  $A^4 = A^3 = A^2$ . Ainsi  $P(A^2) = A^2 - A^2 = 0$ . Le polynôme  $X(X - 1)$  est donc un polynôme annulateur de  $A^2$ .

Vérifions les 4 points de la décomposition pour  $D = A^2$  et  $N = A - A^2$  : (1)  $D + N = A^2 + A - A^2 = A$ . (2)  $D$  est annihilée par le polynôme  $X(X - 1)$  qui est scindé à racines simples (0 et 1). Donc  $D$  est diagonalisable. (3)  $N = A - A^2$ . On calcule  $N^2 = (A - A^2)^2 = A^2 - 2A^3 + A^4$ . Comme  $A^3 = A^4 = A^2$ , on a  $N^2 = A^2 - 2A^2 + A^2 = 0$ . Donc  $N$  est nilpotente. (4)  $D$  et  $N$  sont des polynômes en  $A$ , ils commutent donc entre eux. Par unicité de la décomposition, ce couple est bien le couple de Dunford de  $A$ .

## Partie II - Un exemple par deux méthodes

### Q7.

Calculons le polynôme caractéristique de  $A$  :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 + C_1} \begin{vmatrix} X-3 & X-2 & -1 \\ -2 & X-2 & -1 \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ -2 & X-2 & -1 \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X-2)^2 \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont 1 (simple) et 2 (double). Pour  $\lambda = 2$ , l'espace propre est  $E_2 = \ker(A-2I)$ .

$A-2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Le rang de cette matrice est 2 (les colonnes 2 et 3 ne sont pas colinéaires).

Par le théorème du rang,  $\dim(E_2) = 3 - 2 = 1$ . Puisque la multiplicité géométrique (1) est strictement inférieure à la multiplicité algébrique (2), la matrice  $A$  **n'est pas diagonalisable**.

Le polynôme  $\chi_A$  est annulateur de  $u$  (Cayley-Hamilton), donc  $(u - id) \circ (u - 2id)^2 = 0$ . Les polynômes  $(X-1)$  et  $(X-2)^2$  étant premiers entre eux, le lemme de décomposition des noyaux donne :  $\mathbb{R}^3 = \ker(u - id) \oplus \ker(u - 2id)^2$ .

### Q8.

—  $e_1 \in \ker(A - I)$ .  $A - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Le système donne  $2x - y + z = 0$  et  $x - y + z = 0$ ,

ce qui implique  $x = 0$  et  $y = z$ . On choisit  $e_1 = (0, 1, 1)^T$ .

—  $e_2 \in \ker(A - 2I)$ . Le système  $(A - 2I)X = 0$  donne  $x - y + z = 0$  et  $z = 0$ , donc  $x = y$ . On choisit  $e_2 = (1, 1, 0)^T$ .

—  $e_3 \in \ker(A - 2I)^2$  tel qu'il complète la base. On cherche  $e_3$  tel que  $(A - 2I)e_3 = e_2$ . Le système s'écrit  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La dernière ligne donne  $x - y = 0 \implies x = y$ .

La première donne  $x - y + z = 1 \implies z = 1$ . On choisit  $e_3 = (0, 0, 1)^T$ . On a bien  $(A - 2I)^2 e_3 = (A - 2I)e_2 = 0$ .

Dans cette base  $(e_1, e_2, e_3)$ , on a  $u(e_1) = e_1$ ,  $u(e_2) = 2e_2$ , et  $u(e_3) = e_2 + 2e_3$ . La matrice  $B$  de  $u$  est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

### Q9.

La matrice  $B$  s'écrit  $B = D_B + N_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  $D_B$  est diagonale,  $N_B$  est nilpotente ( $N_B^2 = 0$ ) et elles commutent. C'est la décomposition de Dunford de  $B$ . Comme  $A = PBP^{-1}$  avec  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , le couple de Dunford de  $A$  est  $D = PD_BP^{-1}$  et  $N = PN_BP^{-1}$ .

Calculons  $P^{-1}$ . Par la méthode des cofacteurs ou le pivot de Gauss :  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$N = PN_B P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et pour  $D$  :  $D = A - N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

### Q10.

La décomposition en éléments simples est de la forme  $\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{(X-2)^2}$ . On trouve  $a = \left[ \frac{1}{(X-2)^2} \right]_{X=1} = 1$ , et  $c = \left[ \frac{1}{X-1} \right]_{X=2} = 1$ . En évaluant en  $X = 0$ , on obtient  $-1/4 = -a - b/2 + c/4 = -1 - b/2 + 1/4 \implies b/2 = -1/2 \implies b = -1$ . D'où  $\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{-X+3}{(X-2)^2}$ . En multipliant par le dénominateur commun :

$$1 = (X-2)^2(1) + (X-1)(-X+3)$$

On identifie  $U(X) = -X + 3$  (de degré  $1 < 2$ ) et  $V(X) = 1$  (de degré  $0 < 1$ ).

### Q11.

D'après la relation de Bézout précédente évaluée en l'endomorphisme  $u$ , on a  $(u - id) \circ U(u) + (u - 2id)^2 \circ V(u) = id$ . Donc  $q + p = id$ . Pour tout vecteur  $x$ ,  $p(x) + q(x) = x$ . Puisque  $(X-1)$  et  $(X-2)^2$  sont les facteurs du polynôme caractéristique annulateur,  $p \circ q = q \circ p = 0$ . On a donc  $p^2 = p(id - q) = p - pq = p$ ,  $p$  est un projecteur. De même  $q$  est un projecteur. De plus  $\text{Im}(p) \subset \ker(u - id)$  et  $\text{Im}(q) \subset \ker(u - 2id)^2$ . Comme  $p + q = id$ , la somme des images est  $\mathbb{R}^3$ , et le lemme des noyaux confirme que  $p$  est le projecteur sur  $\ker(u - id)$  parallèlement à  $\ker(u - 2id)^2$ , et  $q$  est le projecteur sur  $\ker(u - 2id)^2$  parallèlement à  $\ker(u - id)$ .

### Q12.

La matrice de  $p$  dans  $(e_1, e_2, e_3)$  est  $\text{Diag}(1, 0, 0)$ . La matrice de  $q$  dans la même base est  $\text{Diag}(0, 1, 1)$ . La matrice de  $d = p + 2q$  est donc  $\text{Diag}(1, 2, 2)$ , qui est exactement  $D_B$ . Donc  $D = d(A) = p(A) + 2q(A) = V(A)(A - 2I)^2 + 2U(A)(A - I) = (A - 2I)^2 + 2(-A + 3I)(A - I)$ . En développant :  $D = A^2 - 4A + 4I + 2(-A^2 + 4A - 3I) = -A^2 + 4A - 2I$ . On en déduit  $N$  comme polynôme en  $A$  :  $N = A - D = A^2 - 3A + 2I$ .

## Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

### Q13.

Soit  $x \in E_{\lambda_i}(u)$ . Alors  $u(x) = \lambda_i x$ . Comme  $u$  et  $v$  commutent,  $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda_i x) = \lambda_i v(x)$ . Ceci prouve que  $v(x) \in E_{\lambda_i}(u)$ . Le sous-espace  $E_{\lambda_i}(u)$  est donc stable par  $v$ . L'endomorphisme induit  $v_i$  sur  $E_{\lambda_i}(u)$  est la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable, il est donc lui-même diagonalisable. L'espace  $E_{\lambda_i}(u)$  admet donc une base de vecteurs propres de  $v$ . Ces vecteurs, appartenant à  $E_{\lambda_i}(u)$ , sont aussi des vecteurs propres de  $u$ . Puisque  $u$  est diagonalisable,  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$ . La concaténation de ces bases forme une base de  $E$  constituée de vecteurs propres communs à  $u$  et à  $v$ .

#### Q14.

Si  $A$  et  $B$  commutent et sont diagonalisables, d'après Q13, ils sont simultanément diagonalisables. Il existe donc une matrice de passage  $P$  telle que  $A = PD_A P^{-1}$  et  $B = PD_B P^{-1}$  avec  $D_A, D_B$  diagonales. Alors  $A - B = P(D_A - D_B)P^{-1}$ . Puisque  $D_A - D_B$  est diagonale,  $A - B$  est diagonalisable.

#### Q15.

Soient  $A$  et  $B$  nilpotentes telles que  $AB = BA$ . Il existe  $p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $A^p = 0$  et  $B^q = 0$ . Par la formule du binôme de Newton (valide car  $A$  et  $B$  commutent) :  $(A - B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k (-B)^{p+q-k}$ . Dans cette somme, pour chaque terme, soit  $k \geq p$  (et alors  $A^k = 0$ ), soit  $k < p \implies p + q - k > q$  (et alors  $B^{p+q-k} = 0$ ). Tous les termes de la somme sont donc nuls. Ainsi  $(A - B)^{p+q} = 0$ , et  $A - B$  est nilpotente.

#### Q16.

Une matrice  $M$  diagonalisable est semblable à une matrice diagonale  $D$ . Si  $M$  est également nilpotente, ses valeurs propres (qui sont les éléments diagonaux de  $D$ ) sont toutes nulles. Donc  $D = 0$ . Par suite,  $M = P \times 0 \times P^{-1} = 0$ . La seule matrice simultanément diagonalisable et nilpotente est la matrice nulle.

#### Q17.

Soit  $(D, N)$  une décomposition de Dunford de  $A$  avec  $D, N$  polynômes en  $A$ . Soit  $(D', N')$  un autre couple vérifiant (1), (2), (3) et (4). Puisque  $A = D + N = D' + N'$ , on a  $D - D' = N' - N$ . Puisque  $D'$  et  $N'$  commutent, ils commutent avec leur somme  $A = D' + N'$ . Puisque  $D$  et  $N$  sont des polynômes en  $A$ , ils commutent avec tout ce qui commute avec  $A$ . Donc  $D'$  commute avec  $D$ , et  $N'$  commute avec  $N$ .  $D$  et  $D'$  sont diagonalisables et commutent, donc (Q14)  $D - D'$  est diagonalisable.  $N$  et  $N'$  sont nilpotentes et commutent, donc (Q15)  $N' - N$  est nilpotente. Ainsi, la matrice  $D - D' = N' - N$  est à la fois diagonalisable et nilpotente. D'après Q16, elle est nulle. On en déduit que  $D = D'$  et  $N = N'$ . La décomposition de Dunford est donc unique.

### Partie IV - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

#### Q18.

$\mathcal{D}$  n'est pas un espace vectoriel. En effet, il n'est pas stable par addition. Par exemple, soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Ces deux matrices ont des valeurs propres distinctes (0 et 1, et 0 et -1), elles sont donc diagonalisables ( $A, B \in \mathcal{D}$ ). Pourtant leur somme est  $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , qui est une matrice nilpotente non nulle, et donc non diagonalisable ( $A + B \notin \mathcal{D}$ ).

Si  $P$  est fixée, l'application  $\phi : M \mapsto PMP^{-1}$  est un isomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie  $M_n(\mathbb{C})$ . Toute application linéaire en dimension finie est continue.

#### Q19.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Sur  $\mathbb{C}$ , le polynôme caractéristique est toujours scindé, donc  $A$  est trigonalisable. Il existe  $P$  inversible et  $T$  triangulaire supérieure telles que  $A = PTP^{-1}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on définit la matrice  $T_k$  construite à partir de  $T$  en ajoutant à chaque coefficient diagonal  $t_{i,i}$  un terme  $\epsilon_{i,k}$  tel que  $\epsilon_{i,k} \rightarrow 0$  et de sorte que les éléments diagonaux de  $T_k$  soient deux à deux distincts. La matrice  $T_k$  a toutes ses valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. Soit  $A_k = PT_k P^{-1}$ . Comme  $T_k$  est diagonalisable,  $A_k \in \mathcal{D}$ . Puisque  $T_k \rightarrow T$  et que l'application de

similitude est continue (Q18), on a  $A_k \rightarrow PTP^{-1} = A$ . Tout élément de  $M_n(\mathbb{C})$  est limite d'une suite d'éléments de  $\mathcal{D}$ . Donc  $\mathcal{D}$  est dense dans  $M_n(\mathbb{C})$ .

**Q20.**

Si  $A \in \mathcal{D}$ , la matrice  $A$  est diagonalisable. Sa décomposition de Dunford est  $(A, 0)$ . Donc  $\delta(A) = A$ . L'application  $\delta$  coïncide avec l'identité sur  $\mathcal{D}$ .

Raisonnons par l'absurde. Si  $\delta$  était continue sur  $M_n(\mathbb{C})$ , alors puisque  $\mathcal{D}$  est dense et que  $\delta = \text{Id}$  sur  $\mathcal{D}$ , on aurait, par passage à la limite,  $\delta(A) = A$  pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Or, si on prend  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  qui est nilpotente non nulle, sa décomposition de Dunford est  $(0, A)$ , donc  $\delta(A) = 0 \neq A$ . Il y a contradiction, donc l'application  $\delta : A \mapsto D$  n'est **pas continue**.

axi-om.fr