

Proposition de Corrigé
Concours Commun INP 2022 – Mathématiques 2 (Filière MP)

EXERCICE 1

Q1.

On calcule $V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$. La formule proposée donne $\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i) = x_2 - x_1$. Elle est donc vérifiée pour $n = 2$.

Si parmi les nombres x_1, \dots, x_n au moins deux sont égaux (par exemple $x_i = x_j$ avec $i \neq j$), alors la matrice de Vandermonde possède deux colonnes identiques, donc son déterminant est nul : $V(x_1, \dots, x_n) = 0$. Par ailleurs, le produit $\prod_{1 \leq k < l \leq n} (x_l - x_k)$ contient le facteur $(x_j - x_i) = 0$, donc le produit est également nul. L'égalité $0 = 0$ étant trivialement vérifiée dans ce cas, il suffit de démontrer la formule en supposant les nombres x_1, \dots, x_n deux à deux distincts.

Q2.

Développons le déterminant $V(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ par rapport à sa dernière colonne.

$$P(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} t^{k-1} \Delta_{k,n}$$

où $\Delta_{k,n}$ est le mineur associé à la position (k, n) . Ceci montre que $P(t)$ est une combinaison linéaire des puissances $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$. C'est donc une fonction polynomiale en t de degré au plus $n-1$. Le coefficient de t^{n-1} correspond au terme $k = n$ dans la somme, c'est-à-dire $(-1)^{2n} \Delta_{n,n} = \Delta_{n,n}$. Or, le mineur $\Delta_{n,n}$ est exactement le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, ce qui correspond exactement à la matrice de Vandermonde d'ordre $n-1$. Le coefficient dominant est donc $V(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Q3.

Démontrons la propriété par récurrence sur $n \geq 2$.

- **Initialisation** : Pour $n = 2$, on l'a vérifié à la Q1.
- **Hérédité** : Soit $n \geq 3$. Supposons la propriété vraie pour $n-1$. Considérons le polynôme $P(t) = V(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, si on évalue en $t = x_i$, la matrice possède deux colonnes identiques (la i -ème et la n -ème), donc son déterminant est nul : $P(x_i) = 0$. Les $n-1$ nombres x_1, \dots, x_{n-1} étant deux à deux distincts, ce sont $n-1$ racines distinctes du polynôme P qui est de degré au plus $n-1$. Le polynôme P est donc factorisable sous la forme $P(t) = c \prod_{i=1}^{n-1} (t - x_i)$, où c est son coefficient dominant. D'après Q2, $c = V(x_1, \dots, x_{n-1})$. Par l'hypothèse de récurrence, $c = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)$. On

évalue alors en $t = x_n$:

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_n) &= P(x_n) = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i) \right) \times \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

L'hérédité est prouvée.

Application : Considérons la matrice $A = (i^j)_{1 \leq i, j \leq n}$. On a $A_{i,j} = i^j = i \times i^{j-1}$. On peut factoriser la ligne i par le nombre i . Par multilinéarité du déterminant :

$$\det(A) = 1 \times 2 \times \dots \times n \times \det(i^{j-1}) = n! V(1, 2, \dots, n)$$

Or $V(1, 2, \dots, n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) = \prod_{j=2}^n \prod_{i=1}^{j-1} (j - i)$. Le produit intérieur vaut $(j - 1)!$. Donc $V(1, 2, \dots, n) = \prod_{j=1}^n (j - 1)!$. Finalement, $\det(A) = n! \prod_{j=1}^n (j - 1)! = \prod_{j=1}^n j!$.

Q4.

- **Exemple :** Pour $n = 2$, on cherche $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*$ distincts tels que $a_1^2 + a_2^2 = 0$. Il suffit de prendre $a_1 = 1$ et $a_2 = i$. On a bien $1^2 + i^2 = 1 - 1 = 0$. (Pour $n > 2$, on peut prendre $1, i$ et $n - 2$ autres complexes fixés de sorte que la somme de leurs carrés soit nulle, par exemple des paires du type z et iz).
- Soient x_1, \dots, x_n distincts et non nuls. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\forall p \in 1, n$, $\sum_{k=1}^n x_k^p = 0$. On peut réécrire ce système comme suit pour $p = j \in 1, n$:

$$\sum_{k=1}^n x_k x_k^{j-1} = 0$$

C'est un système d'équations linéaires homogène dont les inconnues sont $Y_k = x_k$. La matrice de ce système est $M = (x_k^{j-1})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n}$, qui est exactement la matrice de Vandermonde. Les x_k étant deux à deux distincts, son déterminant est non nul, la matrice est inversible. Le système admet donc pour unique solution $Y_1 = \dots = Y_n = 0$. On aurait donc $x_1 = \dots = x_n = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que les x_k sont non nuls. L'une des sommes est donc nécessairement non nulle.

EXERCICE 2

Q5.

Pour tout entier $k \geq 0$, puisque la norme est une norme d'algèbre, on a $\|\frac{1}{k!} A^k\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k$. La série de terme général $\frac{\|A\|^k}{k!}$ est la série exponentielle réelle évaluée en $\|A\|$, elle est convergente (vers $e^{\|A\|}$). La série matricielle $\sum \frac{1}{k!} A^k$ est donc **absolument convergente**. Puisque $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé de dimension finie (donc complet, c'est un espace de Banach), toute série absolument convergente y est convergente.

Q6.

Posons $S_N(A) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k$. Chaque S_N est une fonction polynomiale de ses coefficients, donc continue sur $M_n(\mathbb{R})$. Soit $R > 0$. Sur la boule fermée $B(0, R)$, on a $\|\frac{1}{k!} A^k\| \leq \frac{R^k}{k!}$, qui est le terme général d'une série convergente indépendante de A . La suite de fonctions (S_N) converge donc normalement (et donc uniformément) vers la fonction $A \mapsto e^A$ sur toute boule fermée. La limite uniforme de fonctions continues étant continue, l'application est continue sur tout fermé borné, donc continue sur $M_n(\mathbb{R})$.

Q7.

On note $R(H) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k$. En utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|R(H)\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|H\|^k = e^{\|H\|} - 1 - \|H\|$$

Donc $\frac{1}{\|H\|} \|R(H)\| \leq \frac{e^{\|H\|} - 1 - \|H\|}{\|H\|}$. Or, au voisinage de 0, $e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2} = o(x)$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = 0$. On en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim_{H \rightarrow 0} \frac{1}{\|H\|} \|R(H)\| = 0$.

Déduisons-en la différentiabilité en 0. On écrit :

$$e^{0+H} = e^H = I + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k = e^0 + L(H) + R(H)$$

où $L(H) = H$ est une application linéaire et continue, et $\|R(H)\| = o(\|H\|)$. Ceci prouve que l'application $A \mapsto e^A$ est différentiable en 0, et sa différentielle en 0 est l'application identité : $dL_0(H) = H$.

PROBLÈME

Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Q8.

Remarquons que $A = (a-b)I_3 + bJ$. Cherchons les valeurs propres de J . J est une matrice de rang 1 et de trace 3. Ses valeurs propres sont donc 0 (multiplicité 2) et 3 (multiplicité 1). Soit E_λ l'espace propre de J pour la valeur propre λ . Pour $X \in E_0$, $AX = (a-b)X + bJX = (a-b)X$. Donc $a-b$ est valeur propre de A de multiplicité 2. Pour $X \in E_3$, $AX = (a-b)X + b(3X) = (a+2b)X$. Donc $a+2b$ est valeur propre de A de multiplicité 1. La matrice A étant symétrique réelle, elle appartient à S_3^+ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles, c'est-à-dire si et seulement si $a-b \geq 0 \iff a \geq b$, et $a+2b \geq 0$.

Q9.

On a $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$. Par une récurrence immédiate, pour

tout entier $k \geq 1$, $J^k = 3^{k-1}J$. Cette relation est **fausse pour** $k=0$, car $J^0 = I_3 \neq 3^{-1}J$.

Puisque $(a-b)I_3$ commute avec bJ , on a :

$$e^A = e^{(a-b)I_3} e^{bJ} = (e^{a-b} I_3) e^{bJ}$$

Calculons e^{bJ} :

$$e^{bJ} = I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} J^k = I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} 3^{k-1} J = I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(3b)^k}{k!} \right) J = I_3 + \frac{e^{3b} - 1}{3} J$$

D'où :

$$e^A = e^{a-b} I_3 + e^{a-b} \frac{e^{3b} - 1}{3} J$$

Les valeurs propres de e^A s'obtiennent avec celles de J :

- Associée à $\lambda_J = 0$, on a $e^{a-b} + 0 = e^{a-b} > 0$.
- Associée à $\lambda_J = 3$, on a $e^{a-b} + e^{a-b} \frac{e^{3b} - 1}{3} \times 3 = e^{a-b} + e^{a-b}(e^{3b} - 1) = e^{a+2b} > 0$.

De plus e^A est une combinaison linéaire de I_3 et J , elle est donc symétrique. Ses valeurs propres étant toutes strictement positives, on a bien $e^A \in S_3^+$.

Q10.

L'application $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie ($M_n(\mathbb{R})$). Elle est donc continue.

Si $A \in S_n^+$, par le théorème spectral, A est diagonalisable. A est donc semblable à une matrice diagonale D dont les termes diagonaux sont les valeurs propres $\lambda_i \geq 0$. Soit $A = PDP^{-1}$. Pour tout k , $A^k = PD^kP^{-1}$. Par linéarité et continuité de φ , on obtient :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1} = Pe^D P^{-1}$$

La matrice diagonale e^D a pour termes diagonaux e^{λ_i} . Ainsi e^A est semblable à e^D .

Pour prouver que $e^A \in S_n^+$: A étant symétrique, pour tout k , A^k est symétrique. S_n étant fermé, e^A (limite de polynômes en A) est symétrique. Les valeurs propres de e^A sont les termes diagonaux de e^D , soit e^{λ_i} . L'exponentielle réelle étant strictement positive, les valeurs propres de e^A sont strictement positives. Donc $e^A \in S_n^+$.

Partie II - Produit de Hadamard de deux matrices**Q11.**

D'après Q8, $A \in S_3^+ \implies a \geq b$ et $a+2b \geq 0$. La matrice $E(A)$ est de la forme $\begin{pmatrix} e^a & e^b & e^b \\ e^b & e^a & e^b \\ e^b & e^b & e^a \end{pmatrix}$.

C'est la même forme avec $a' = e^a$ et $b' = e^b$. Puisque $a \geq b$ et que la fonction exponentielle est croissante, on a $e^a \geq e^b$, donc $a' \geq b'$. De plus, la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc $a' > 0$ et $b' > 0$. Par conséquent, $a' + 2b' = e^a + 2e^b > 0$. D'après les conditions de la Q8, $E(A)$ appartient bien à S_3^+ .

Q12.

Soit $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ avec $d_i \geq 0$. Si $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$, un simple calcul par blocs ou coordonnées donne :

$${}^tYDY = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$$

Comme $d_i \geq 0$ et $y_i^2 \geq 0$, on a ${}^tYDY \geq 0$.

Soit $A \in S_n$. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P (${}^tP = P^{-1}$) et une matrice diagonale D telles que $A = PD{}^tP$.

— Si $A \in S_n^+$, les termes diagonaux de D (valeurs propres) sont ≥ 0 . Pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$:

$${}^tXAX = {}^tX(PD{}^tP)X = ({}^tPX)^T D ({}^tPX)$$

En posant $Y = {}^tPX$, on a ${}^tXAX = {}^tYDY \geq 0$.

— Réciproquement, si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0$. Soit λ une valeur propre de A et E un vecteur propre associé. On a $AE = \lambda E$. Alors ${}^tEAE = \lambda {}^tEE = \lambda \|E\|^2$. Or $\|E\|^2 > 0$ et le membre de gauche est positif ou nul. Donc $\lambda \geq 0$. Ainsi $A \in S_n^+$.

Q13.

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$${}^tX(\alpha A + \beta B)X = \alpha {}^tXAX + \beta {}^tXBX$$

Puisque $A, B \in S_n^+$, d'après Q12, ${}^tXAX \geq 0$ et ${}^tXBX \geq 0$. Comme $\alpha, \beta \geq 0$, la somme est ≥ 0 . De plus, $\alpha A + \beta B$ est symétrique. Donc $\alpha A + \beta B \in S_n^+$.

A-t-on nécessairement $AB \in S_n^+$? Non. Le produit AB n'est en général même pas symétrique. Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (vp > 0, trace=3, det=1 donc $\in S_2^+$) et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_2^+$. Leur produit est $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui n'est pas symétrique.

Q14.

Puisque $A \in S_n^+$, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{Diag}(\lambda_i)$ et $\lambda_i \geq 0$. Soit $\Delta = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Ses valeurs propres sont ≥ 0 . On pose $R = P\Delta P^{-1}$. R est symétrique (car $P^{-1} = {}^tP$) et semblable à Δ , donc ses valeurs propres sont $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$, d'où $R \in S_n^+$. De plus, $R^2 = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Q15.

Les matrices U et V sont symétriques. Le terme (i, k) de $A = U^2$ est $a_{i,k} = \sum_{j=1}^n u_{i,j}u_{k,j} = \sum_{j=1}^n u_{k,j}u_{i,j}$ (par symétrie de U). Le terme de $B = V^2$ est $b_{i,j} = \sum_{l=1}^n v_{l,i}v_{l,j}$. Le terme $c_{i,j}$ de $A * B$ est le produit $a_{i,j}b_{i,j}$, on a donc bien :

$$c_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^n u_{k,i}u_{k,j} \right) \left(\sum_{l=1}^n v_{l,i}v_{l,j} \right)$$

Pour montrer que $A * B \in S_n^+$: la matrice est trivialement symétrique. Étudions la forme quadratique :

$$\begin{aligned} {}^tX(A * B)X &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{i,j}x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n u_{k,i}u_{k,j} \right) \left(\sum_{l=1}^n v_{l,i}v_{l,j} \right) x_i x_j \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_{k,i}v_{l,i}x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n u_{k,j}v_{l,j}x_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_{k,i}v_{l,i}x_i \right)^2 \end{aligned}$$

C'est une somme de carrés, elle est donc positive ou nulle. D'après Q12, $A * B \in S_n^+$.

Q16.

Dans le produit de Hadamard, on multiplie terme à terme. Le terme d'indice (i, j) de A^{*p} est $(a_{i,j})^p$. Par suite, le terme d'indice (i, j) de la matrice $T_N = \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} A^{*p}$ est :

$$\sum_{p=0}^N \frac{(a_{i,j})^p}{p!}$$

Ceci est la N -ème somme partielle de la série exponentielle réelle évaluée en $a_{i,j}$. Lorsque $N \rightarrow +\infty$, cette somme tend vers $e^{a_{i,j}}$. Ainsi, la limite de la suite de matrices (T_N) est exactement la matrice $E(A)$.

Q17.

Pour X fixé, l'application $M \mapsto {}^tXMX$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel de dimension finie $M_n(\mathbb{R})$, elle est donc continue.

L'ensemble S_n^+ peut être défini comme :

$$S_n^+ = \left(\bigcap_{X \in M_{n,1}(\mathbb{R})} \{M \in S_n \mid {}^t X M X \geq 0\} \right)$$

Chaque ensemble $\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t X M X \geq 0\}$ est l'image réciproque du fermé $[0, +\infty[$ par une application continue. C'est donc un fermé. L'espace S_n est un fermé (sous-espace vectoriel de dimension finie). L'intersection de fermés est un fermé. Ainsi S_n^+ est une **partie fermée**.

En déduire que si $A \in S_n^+$, alors $E(A) \in S_n^+$: On a montré à la Q15 que S_n^+ est stable par produit de Hadamard. Par récurrence, $A^{*p} \in S_n^+$. D'après Q13, la combinaison linéaire à coefficients positifs de matrices de S_n^+ reste dans S_n^+ . Donc pour tout N , $T_N = \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} A^{*p} \in S_n^+$. Puisque S_n^+ est fermé, la limite d'une suite d'éléments de S_n^+ appartient à S_n^+ . Or, la limite de T_N est $E(A)$ (Q16). On a donc bien $E(A) \in S_n^+$.

axi-om.fr