

Proposition de Corrigé  
Concours Commun INP 2023 – Mathématiques 2 (Filière MP)

## EXERCICE 1

### Q1.

L'application  $\langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est :

- **Symétrique** :  $\forall P, Q \in E, \langle P|Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} Q(x)P(x)e^{-x}dx = \langle Q|P \rangle$ .
- **Bilinéaire** : Par symétrie et linéarité de l'intégrale (les intégrales convergent car tout polynôme multiplié par  $e^{-x}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  d'après l'énoncé).
- **Positive** :  $\forall P \in E, \langle P|P \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)^2 e^{-x} dx \geq 0$  car l'intégrande est positif sur l'intervalle.
- **Définie** : Si  $\langle P|P \rangle = 0$ , l'intégrale d'une fonction continue et positive sur  $[0, +\infty[$  étant nulle, la fonction est identiquement nulle. Donc  $P(x)^2 e^{-x} = 0$  pour tout  $x \geq 0$ , soit  $P(x) = 0$  pour tout  $x \geq 0$ . Le polynôme  $P$  ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

Ceci prouve que  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  définit bien un produit scalaire sur  $E$ .

### Q2.

Cherchons le projeté orthogonal de  $X^2$  sur  $F = \mathbb{R}_1[X]$ . On note  $P_F(X^2) = aX + b$ . Ce projeté est l'unique polynôme de  $F$  tel que  $X^2 - (aX + b) \in F^\perp$ . Puisque  $(1, X)$  est une base de  $F$ , cela équivaut à :

$$\begin{cases} \langle X^2 - aX - b | 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - aX - b | X \rangle = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a\langle X | 1 \rangle + b\langle 1 | 1 \rangle = \langle X^2 | 1 \rangle \\ a\langle X | X \rangle + b\langle 1 | X \rangle = \langle X^2 | X \rangle \end{cases}$$

Calculons les produits scalaires nécessaires en utilisant  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$  :

- $\langle 1 | 1 \rangle = 0! = 1$
- $\langle X | 1 \rangle = 1! = 1$
- $\langle X^2 | 1 \rangle = \langle X | X \rangle = 2! = 2$
- $\langle X^2 | X \rangle = 3! = 6$

Le système devient :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$$

En soustrayant la première équation à la seconde, on obtient  $a = 4$ . On en déduit  $b = 2 - a = -2$ . Ainsi, le projeté orthogonal est  $P_F(X^2) = 4X - 2$ .

### Q3.

D'après le théorème de Pythagore, puisque  $P_F(X^2) \in F$  et  $X^2 - P_F(X^2) \in F^\perp$ , ces deux vecteurs sont orthogonaux, donc :

$$\|X^2\|^2 = \|P_F(X^2)\|^2 + \|X^2 - P_F(X^2)\|^2 \implies \|X^2 - P_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|P_F(X^2)\|^2$$

Calculons les normes :

- $\|X^2\|^2 = \langle X^2 | X^2 \rangle = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx = 4! = 24$ .
- $\|P_F(X^2)\|^2 = \|4X - 2\|^2 = 16\|X\|^2 - 16\langle X | 1 \rangle + 4\|1\|^2 = 16(2) - 16(1) + 4(1) = 32 - 16 + 4 = 20$ .

Donc  $\|X^2 - P_F(X^2)\|^2 = 24 - 20 = 4$ .

L'infimum demandé correspond à la distance au carré entre le vecteur  $X^2$  et le sous-espace  $F = \mathbb{R}_1[X]$ . D'après le théorème de la projection orthogonale, cette distance minimale est atteinte pour le projeté orthogonal. Ainsi,  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x} dx = \|X^2 - P_F(X^2)\|^2 = 4$ .

## EXERCICE 2

### Q4.

On a  $Z = \sup(X, Y)$  et  $T = \inf(X, Y)$ . Distinguons les trois cas :

- **Si  $m < n$**  : L'événement  $(Z = m) \cap (T = n)$  est impossible car le maximum ne peut pas être strictement inférieur au minimum. Donc  $\mathbb{P}((Z = m) \cap (T = n)) = 0$ .
- **Si  $m = n$**  : L'événement  $(Z = m) \cap (T = m)$  équivaut à  $(X = m) \cap (Y = m)$ . Les variables  $X$  et  $Y$  étant indépendantes :

$$\mathbb{P}((Z = m) \cap (T = m)) = \mathbb{P}(X = m)\mathbb{P}(Y = m) = (pq^m)^2 = p^2q^{2m}$$

- **Si  $m > n$**  : L'événement se réalise si et seulement si l'une des variables vaut  $m$  et l'autre  $n$ . C'est l'union disjointe de  $((X = m) \cap (Y = n))$  et  $((X = n) \cap (Y = m))$ . Par indépendance et symétrie :

$$\mathbb{P}((Z = m) \cap (T = n)) = \mathbb{P}(X = m)\mathbb{P}(Y = n) + \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = m) = 2p^2q^{m+n}$$

### Q5.

La loi marginale de  $Z$  s'obtient par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Z = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}((Z = m) \cap (T = n))$$

D'après Q4., les probabilités sont nulles pour  $n > m$ . La somme se réduit donc à  $n \leq m$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = m) &= \mathbb{P}((Z = m) \cap (T = m)) + \sum_{n=0}^{m-1} \mathbb{P}((Z = m) \cap (T = n)) \\ &= p^2q^{2m} + \sum_{n=0}^{m-1} 2p^2q^{m+n} = p^2q^{2m} + 2p^2q^m \sum_{n=0}^{m-1} q^n \\ &= p^2q^{2m} + 2p^2q^m \frac{1 - q^m}{1 - q} \end{aligned}$$

Comme  $p = 1 - q$ , on simplifie par  $p$  au dénominateur :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = m) &= p^2q^{2m} + 2pq^m(1 - q^m) = p^2q^{2m} + 2pq^m - 2pq^{2m} \\ &= 2pq^m - pq^{2m}(2 - p) = 2pq^m - pq^{2m}(1 + q) \end{aligned}$$

La loi de  $Z$  est donc donnée par  $\mathbb{P}(Z = m) = 2pq^m - p(1 + q)q^{2m}$ .

# PROBLÈME

## Partie I

### Q6.

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  est une matrice carrée à coefficients réels et symétrique. D'après le théorème spectral, elle est donc diagonalisable. Calculons les carrés des matrices  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  :

$$\Pi_1^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \Pi_1$$

$$\Pi_2^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \Pi_2$$

Ce sont donc bien des matrices de projecteurs. Calculs demandés :

$$- \Pi_1 + 5\Pi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+5(1) & -1+5(1) \\ -1+5(1) & 1+5(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

$$- \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+1 & -1+1 \\ -1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$$- \Pi_1\Pi_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

### Q7.

— **Inclusions** : Soit  $x \in \text{Ker}(P(u))$ , alors  $P(u)(x) = 0$ . On a  $(PQ)(u)(x) = Q(u)(P(u)(x)) = Q(u)(0) = 0$ . Donc  $\text{Ker}(P(u)) \subset \text{Ker}((PQ)(u))$ . De même, par commutativité des polynômes d'endomorphismes,  $\text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}((PQ)(u))$ .

— **Somme directe** : Les polynômes  $P$  et  $Q$  étant premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe  $U, V \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $UP + VQ = 1$ . En évaluant en  $u$ , on a l'identité :  $U(u)P(u) + V(u)Q(u) = id_E$ . Soit  $x \in \text{Ker}((PQ)(u))$ . On décompose  $x$  à l'aide de l'identité :

$$x = id_E(x) = U(u)P(u)(x) + V(u)Q(u)(x)$$

Posons  $x_Q = U(u)P(u)(x)$  et  $x_P = V(u)Q(u)(x)$ , de sorte que  $x = x_Q + x_P$ . Vérifions que  $x_Q \in \text{Ker}(Q(u))$  :  $Q(u)(x_Q) = Q(u)U(u)P(u)(x) = U(u)(PQ)(u)(x) = U(u)(0) = 0$ . Vérifions que  $x_P \in \text{Ker}(P(u))$  :  $P(u)(x_P) = P(u)V(u)Q(u)(x) = V(u)(PQ)(u)(x) = V(u)(0) = 0$ . On a donc montré que  $\text{Ker}((PQ)(u)) \subset \text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u))$ .

— **Intersection nulle** : Soit  $x \in \text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u))$ . En utilisant la même relation :  $x = U(u)P(u)(x) + V(u)Q(u)(x) = U(u)(0) + V(u)(0) = 0$ . L'intersection est donc réduite à  $\{0\}$ .

Conclusion :  $\text{Ker}((PQ)(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$ .

### Q8.

Par définition,  $Q_1 = P_2^{k_2}$  et  $Q_2 = P_1^{k_1}$ . Puisque  $P_1$  et  $P_2$  sont des polynômes premiers entre eux, leurs puissances respectives  $P_1^{k_1}$  et  $P_2^{k_2}$  sont également des polynômes premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe bien deux polynômes  $R_1$  et  $R_2$  de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$ .

### Q9.

Pour tout  $i$ , on pose  $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ .

- **Produit nul** : Pour  $i \neq j$ ,  $p_i \circ p_j = R_i(u)Q_i(u)R_j(u)Q_j(u)$ . Par définition,  $Q_i$  est le produit des  $P_k^{k_i}$  pour  $k \neq i$ . Ainsi, le produit  $Q_iQ_j$  contient tous les facteurs  $P_k^{k_i}$  pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Le polynôme  $Q_iQ_j$  est donc un multiple du polynôme minimal  $\pi_u$ . Puisque  $\pi_u(u) = 0$ , on a  $(Q_iQ_j)(u) = 0$ , ce qui implique que  $p_i \circ p_j = 0$ .
- **Somme égale à l'identité** : Par hypothèse,  $\sum_{i=1}^m R_iQ_i = 1$ . En évaluant cette relation en l'endomorphisme  $u$ , on obtient  $\sum_{i=1}^m R_i(u)Q_i(u) = id_E$ , c'est-à-dire  $\sum_{i=1}^m p_i = id_E$ .
- **Projecteurs** : Pour un  $i$  fixé, en composant l'égalité précédente par  $p_i$  :

$$p_i \circ \left( \sum_{j=1}^m p_j \right) = p_i \circ id_E \implies p_i^2 + \sum_{j \neq i} p_i \circ p_j = p_i$$

Or, pour  $j \neq i$ , on a vu que  $p_i \circ p_j = 0$ . Il reste donc  $p_i^2 = p_i$ . Chaque  $p_i$  est donc bien un projecteur.

### Q10.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur de  $u$ , donc  $\chi_u(u) = 0$ . L'espace tout entier est donc  $E = \text{Ker}(\chi_u(u))$ . Les polynômes  $(X - \lambda_j)^{\alpha_j}$  sont deux à deux premiers entre eux (car les  $\lambda_j$  sont distincts). En appliquant le lemme de décomposition des noyaux (admis dans sa forme générale au Q7), on obtient :

$$E = \text{Ker}(\chi_u(u)) = \bigoplus_{j=1}^m \text{Ker}((u - \lambda_j id_E)^{\alpha_j}) = \bigoplus_{j=1}^m N_j$$

### Q11.

D'après Q9.,  $\sum_{i=1}^m p_i = id_E$ . Pour tout vecteur  $x \in E$ , on a  $x = id_E(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x)$ . Comme chaque  $p_i(x)$  appartient à  $\text{Im}(p_i)$ , cela prouve que  $E = \sum_{i=1}^m \text{Im}(p_i)$ . Montrons que cette somme est directe. Supposons  $\sum_{i=1}^m x_i = 0$  avec  $x_i \in \text{Im}(p_i)$ . Puisque  $p_i$  est un projecteur sur  $\text{Im}(p_i)$ , on a  $p_i(x_i) = x_i$ . Appliquons  $p_j$  à la somme :  $p_j(\sum_{i=1}^m x_i) = p_j(0) = 0$ . Par ailleurs,  $p_j(\sum_{i=1}^m x_i) = p_j(x_j) + \sum_{i \neq j} p_j(p_i(x_i)) = x_j + 0 = x_j$ . On en déduit que pour tout  $j$ ,  $x_j = 0$ . La somme est donc directe :  $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(p_i)$ .

### Q12.

Pour chaque  $i$ ,  $P_i = X - \lambda_i$ . On veut montrer que  $\text{Im}(p_i) = \text{Ker}((u - \lambda_i id_E)^{k_i})$ . Soit  $x \in \text{Im}(p_i)$ . Alors  $p_i(x) = x$ . On a  $P_i^{k_i}(u)(x) = P_i^{k_i}(u)(R_i(u)Q_i(u)(x)) = R_i(u)(P_i^{k_i}Q_i)(u)(x)$ . Or  $P_i^{k_i}Q_i = \pi_u$ , donc  $P_i^{k_i}(u)(x) = R_i(u)(\pi_u(u)(x)) = 0$ . Ainsi,  $\text{Im}(p_i) \subset \text{Ker}(P_i^{k_i}(u))$ . Inversement, soit  $x \in \text{Ker}(P_i^{k_i}(u))$ . Pour tout  $j \neq i$ , le polynôme  $Q_j$  est multiple de  $P_i^{k_i}$ , donc  $Q_j(u)(x) = 0$ , ce qui implique  $p_j(x) = 0$ . En utilisant la relation  $\sum p_j = id_E$ , on a  $x = \sum p_j(x) = p_i(x) \in \text{Im}(p_i)$ . Ainsi  $\text{Im}(p_i) = \text{Ker}(P_i^{k_i}(u))$ . Sachant que  $\text{Ker}(P_i^{k_i}(u))$  est exactement le sous-espace caractéristique associé à  $\lambda_i$  (soit  $N_i$ ), on a bien  $\text{Im}(p_i) = N_i$ .

## Partie II

### Q13.

Si  $u$  est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples. Ses racines sont exactement les valeurs propres de  $u$ . On a donc  $\pi_u(X) = \prod_{j=1}^m (X - \lambda_j)$ .

**Q14.**

Les polynômes  $Q_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)$  ont pour racines les  $\lambda_j$  pour  $j \neq i$ . La décomposition en éléments simples de l'inverse du polynôme minimal s'écrit :

$$\frac{1}{\pi_u(X)} = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{X - \lambda_i}$$

En multipliant par  $(X - \lambda_i)$  et en évaluant en  $\lambda_i$ , on trouve  $A_i = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)}$ . On a donc :

$$\frac{1}{\pi_u(X)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{Q_i(\lambda_i)(X - \lambda_i)}$$

En multipliant cette égalité par  $\pi_u(X)$ , on obtient :

$$1 = \sum_{i=1}^m \frac{\pi_u(X)}{(X - \lambda_i)Q_i(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{Q_i(\lambda_i)} Q_i(X)$$

On identifie ici la relation de Bézout généralisée  $\sum R_i Q_i = 1$  avec  $R_i(X) = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)}$  (des constantes).

Les projecteurs associés à  $u$  sont alors  $p_i = R_i(u)Q_i(u) = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$ .

**Q15.**

Les polynômes de la famille  $\left( \frac{Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)} \right)_{1 \leq i \leq m}$  forment la base des polynômes interpolateurs de Lagrange aux points  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Le polynôme  $X$  étant de degré  $1 \leq m$ , il est égal à son polynôme d'interpolation aux points  $\lambda_i$  :

$$X = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$$

En substituant formellement  $X$  par l'endomorphisme  $u$  dans cette identité polynomiale, on obtient :

$$u = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$$

C'est la décomposition spectrale de  $u$ .

**Q16.**

**a)** La matrice  $A$  est réelle et symétrique. D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable. En calculant le produit matriciel  $A \times A$ , on observe que chaque terme de la diagonale vaut  $1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$ , et que chaque terme hors diagonale vaut 0 (les colonnes sont deux à deux orthogonales). On a donc  $A^2 = 4I_4$ .

**b)** Le polynôme  $P(X) = X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Comme  $A \neq 2I_4$  et  $A \neq -2I_4$ , ce polynôme est le polynôme minimal de  $A$  :  $\pi_A(X) = (X - 2)(X + 2)$ . Les valeurs propres sont donc  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = -2$ . D'après le résultat de Q15, on peut écrire  $A = 2\Pi_1 - 2\Pi_2$ . De plus, d'après Q9,  $\Pi_1 + \Pi_2 = I_4$ . En combinant ces deux égalités, on a  $A = 2\Pi_1 - 2(I_4 - \Pi_1) = 4\Pi_1 - 2I_4$ , ce qui permet de trouver  $\Pi_1 = \frac{A + 2I_4}{4}$ . On en déduit  $\Pi_2 = I_4 - \Pi_1 = \frac{2I_4 - A}{4}$ .

**c)** Les  $\Pi_i$  étant des projecteurs vérifiant  $\Pi_1 \Pi_2 = 0$ , on a pour tout entier  $q \in \mathbb{N}$  :

$$A^q = (2\Pi_1 - 2\Pi_2)^q = 2^q \Pi_1 + (-2)^q \Pi_2$$

**Q17.**

L'application  $\phi : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[v]$  définie par  $P \mapsto P(v)$  est un morphisme d'algèbres surjectif. Son noyau est l'idéal annulateur de  $v$ , qui est engendré par le polynôme minimal  $\pi_v$ . Par le premier théorème d'isomorphisme, l'algèbre quotient  $\mathbb{C}[X]/(\pi_v)$  est isomorphe à l'image  $\mathbb{C}[v]$ . La dimension de  $\mathbb{C}[X]/(\pi_v)$  est exactement égale au degré de  $\pi_v$ . Donc  $\dim(\mathbb{C}[v]) = \deg(\pi_v)$ .

**Q18.**

Puisque  $u$  est diagonalisable, son polynôme minimal  $\pi_u$  a pour degré  $m$  (le nombre de valeurs propres distinctes). D'après Q17, on a donc  $\dim(\mathbb{C}[u]) = m$ . La famille  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$  est composée d'exactly  $m$  éléments de  $\mathbb{C}[u]$  (puisque chaque  $p_i = R_i(u)Q_i(u)$  est un polynôme en  $u$ ). Vérifions que cette famille est libre : soit  $\sum_{i=1}^m c_i p_i = 0$ . En composant cette égalité par  $p_j$ , sachant que  $p_j p_i = 0$  pour  $i \neq j$  et  $p_j^2 = p_j$ , on obtient :

$$c_j p_j = 0$$

Puisque  $p_j$  est non nul (car  $\text{Im}(p_j) = N_j \neq \{0\}$ ), on a  $c_j = 0$ . Ceci est vrai pour tout  $j$ . La famille  $(p_1, \dots, p_m)$  est libre et possède  $m = \dim(\mathbb{C}[u])$  éléments. C'est donc une base de  $\mathbb{C}[u]$ .

**Q19.**

Dans le cas où  $u$  n'est pas diagonalisable, le polynôme minimal de  $u$  possède au moins une racine multiple. Le degré de  $\pi_u$  (qui est  $\dim(\mathbb{C}[u])$ ) est donc strictement supérieur à  $m$  (le nombre de racines distinctes). La famille  $(p_1, \dots, p_m)$  est composée de  $m$  éléments, ce qui est strictement inférieur à la dimension de l'espace. Elle ne peut donc pas être génératrice et ne forme jamais une base de  $\mathbb{C}[u]$ .

**Q20.**

Soit  $P(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ . Ce polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé à racines simples car les  $\lambda_i$  sont distincts. Écrivons  $P(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ . En évaluant en l'endomorphisme  $u$  :

$$P(u) = \sum_{k=0}^m a_k u^k = \sum_{k=0}^m a_k \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i^k f_i \right) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=0}^m a_k \lambda_i^k \right) f_i$$

Or, pour chaque  $i$ , le terme entre parenthèses est exactement  $P(\lambda_i)$ . Puisque chaque  $\lambda_i$  est racine de  $P$ , on a  $P(\lambda_i) = 0$  pour tout  $i$ . D'où  $P(u) = \sum_{i=1}^m 0 \times f_i = 0$ . Le polynôme  $P$  est donc un polynôme annulateur de  $u$ . Puisque  $P$  est scindé à racines simples, l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable.