Proposition de Corrigé
Concours Commun INP 2024 – Mathématiques 2 (Filière MP)

EXERCICE 1

Q1.

Cherchons les valeurs propres de A. Soit $P_A(X) = \det(XI - A)$ son polynôme caractéristique. Remarquons que $A+2I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Toutes les lignes sont proportionnelles à la troisième, donc $rg(A + 2I) = 1$. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(A + 2I)) = 3 - 1 = 2$. La valeur propre $\lambda_1 = -2$ est donc de multiplicité géométrique 2. Cela implique qu'elle est de multiplicité algébrique au moins 2. La trace de A est $Tr(A) = -4+4-3 = -3$. La somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) vaut la trace : $2(-2) + \lambda_3 = -3 \implies \lambda_3 = 1$. Les valeurs propres sont -2 (de multiplicité 2) et 1 (de multiplicité 1). La dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante, la matrice A est donc **diagonalisable**.

Cherchons des bases des sous-espaces propres :

— $E_{-2} = \ker(A+2I)$: L'équation est $-x+y-z = 0 \iff y = x+z$. Une base est constituée des vecteurs $u_1 = (1, 1, 0)^T$ et $u_2 = (0, 1, 1)^T$.

— $E_1 = \ker(A-I)$: On résout le système $(A-I)X = 0$, c'est-à-dire : $\begin{cases} -5x + 2y - 2z = 0 \\ -6x + 3y - 6z = 0 \\ -x + y - 4z = 0 \end{cases} \implies$ $\begin{cases} y = x + 4z \\ -5x + 2(x + 4z) - 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = x + 4z \\ -3x + 6z = 0 \end{cases}$ Donc $x = 2z$ et $y = 6z$. Une base de E_1 est dirigée par $u_3 = (2, 6, 1)^T$.

On pose la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q2.

Le système de suites s'écrit matriciellement $X_{n+1} = AX_n$. En injectant $X_n = PY_n$, on obtient $PY_{n+1} = APY_n \implies Y_{n+1} = P^{-1}APY_n = DY_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$Y_n = D^n Y_0 = \begin{pmatrix} (-2)^n \alpha_0 \\ (-2)^n \beta_0 \\ 1^n \gamma_0 \end{pmatrix}$$

Les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ convergent simultanément si et seulement si les composantes de Y_n convergent. La suite $((-2)^n)$ diverge, donc il faut impérativement que $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 0$. La composante $\gamma_n = \gamma_0$ est constante donc convergente. La condition de convergence est $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$.

Or $X_0 = PY_0$, donc $X_0 = \begin{pmatrix} 2\gamma_0 \\ 6\gamma_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$. Les suites convergent simultanément si et seulement si (u_0, v_0, w_0) est colinéaire à $(2, 6, 1)$, soit $u_0 = 2w_0$ et $v_0 = 6w_0$. Dans ce cas, $Y_n = Y_0$ pour tout n, donc $X_n = PY_n = PY_0 = X_0$. Les suites sont alors constantes et valent pour tout n : $u_n = u_0$, $v_n = v_0$, $w_n = w_0$.

EXERCICE 2

Q3.

- L'instruction Python permettant de trouver l'image de 1 par la permutation `s` est : `s[1]`.
- La transposition $(2\ 3) \in S_4$ échange 2 et 3, et laisse 0 et 1 fixes. Elle est représentée par la liste : `[0, 1, 3, 2]`.

Q4.

```
def comp(s1, s2):
    return [s1[s2[i]] for i in range(len(s1))]
```

Q5.

```
def inv(s):
    n = len(s)
    res = [0] * n
    for i in range(n):
        res[s[i]] = i
    return res
```


Q6.

Un sous-ensemble fini non vide d'un groupe est un sous-groupe si et seulement s'il est stable par la loi interne (composition). Pour plus de sûreté on peut également vérifier la stabilité par passage à l'inverse.

```
def groupe(G):
    if not G: # Vérification de l'ensemble non vide
        return False
    for s1 in G:
        for s2 in G:
            if comp(s1, s2) not in G:
                return False
        if inv(s1) not in G:
            return False
    return True
```

Q7.

Le sous-groupe engendré par σ dans un groupe fini est l'ensemble $\{id, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{k-1}\}$ où k est l'ordre de σ (le plus petit entier tel que $\sigma^k = id$).

```
def cyclique(s):
    n = len(s)
    identite = list(range(n))
```

```
    G = [identite]
    actuel = s
    while actuel != identite:
        G.append(actuel)
        actuel = comp(actuel, s)
    return G
```

PROBLÈME

Q8.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Évaluons la forme quadratique associée :

$$X^T A X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x^2 + 2xy + y^2) = x^2 + (x+y)^2$$

C'est une somme de carrés, elle est donc positive. De plus, $x^2 + (x+y)^2 = 0 \iff x = 0$ et $x + y = 0 \iff x = y = 0$. Comme $X \neq 0$, la quantité $X^T A X$ est strictement positive. La matrice A est donc définie positive.

Caractérisation spectrale

Q9.

Théorème : Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, M est orthogonalement diagonalisable : il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^T$, où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ contient les valeurs propres de M. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, posons $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Comme P est inversible et $X \neq 0$, on a $Y \neq 0$. $X^T M X = X^T (PDP^T) X = (P^T X)^T D (P^T X) = Y^T D Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$.

- **Condition suffisante :** Si $\forall i, \lambda_i > 0$, alors $\sum \lambda_i y_i^2 > 0$ (car les $y_i^2 \geq 0$ et ne sont pas tous nuls). Donc M est définie positive.
- **Condition nécessaire :** Raisonnons par contraposée. S'il existe une valeur propre $\lambda_k \leq 0$, en prenant $Y = E_k$ (le k-ème vecteur de la base canonique, non nul), on a $X = PE_k \neq 0$. Alors $X^T M X = Y^T D Y = \lambda_k \leq 0$. La matrice n'est pas définie positive.

$\square$

Q10.

La fonction polynomiale $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $P'(X) = 3X^2 - 12X + 9 = 3(X-1)(X-3)$. La dérivée s'annule en 1 et 3. On calcule $P(1) = 1$ et $P(3) = -3$. De plus $P(0) = -3 < 0$. D'après le tableau de variations (strictement croissante sur $]-\infty, 1]$, strictement décroissante sur $[1, 3]$, strictement croissante sur $[3, +\infty[$) et le théorème de la bijection appliqué sur ces trois intervalles, P admet trois racines réelles distinctes. Puisque $P(0) = -3 < 0$ et P est croissante sur $]-\infty, 1]$, la première racine est strictement positive. Les trois racines sont donc strictement positives.

Calculons le polynôme caractéristique de B :

$$\chi_B(X) = \det(XI - B) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$$
$$= (X-1)\big((X-2)(X-3)-1\big) - 1\big(0-(-(X-2))\big)$$
$$= (X-1)(X^2-5X+5) - (X-2) = X^3 - 5X^2 + 5X - X^2 + 5X - 5 - X + 2$$
$$= X^3 - 6X^2 + 9X - 3 = P(X)$$

Les valeurs propres de la matrice symétrique B sont les racines de P, qui sont toutes strictement positives. Par la caractérisation spectrale (Q9), B est définie positive.

Un critère en dimension 2

Q11.

Soit M une matrice définie positive de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. D'après Q9, pour tout i, $\lambda_i > 0$. La trace est la somme des valeurs propres : $Tr(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$. Le déterminant est le produit des valeurs propres : $\det(M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$.

Q12.

Soit $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Ses valeurs propres λ_1, λ_2 vérifient $\lambda_1 + \lambda_2 = Tr(M) > 0$ et $\lambda_1\lambda_2 = \det(M) > 0$. Leur produit étant strictement positif, elles sont de même signe. Leur somme étant strictement positive, elles sont toutes les deux strictement positives. D'après Q9, M est définie positive.

Q13.

Le résultat est **faux** en dimension 3. Considérons la matrice diagonale $M = \mathrm{Diag}(10, -1, -2)$ qui est symétrique. $Tr(M) = 10-1-2 = 7 > 0$. $\det(M) = 10 \times (-1) \times (-2) = 20 > 0$. Pourtant, M possède des valeurs propres négatives (-1 et -2). Elle n'est donc pas définie positive.

Q14.

On étudie $f(x,y) = x + y + \frac{1}{xy}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Recherche des points critiques (gradient nul) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x^2y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{1}{xy^2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2y = 1 \\ xy^2 = 1 \end{cases} \implies x = y = 1$$

L'unique point critique est $(1,1)$. La matrice hessienne en ce point est : $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(1,1)}$.

Les dérivées secondes sont : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{xy^3}$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x^2y^2}$. En $(1,1)$, on obtient $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On observe que $H \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $Tr(H) = 4 > 0$ et $\det(H) = 3 > 0$. D'après Q12, H est définie positive. Le point $(1,1)$ correspond donc à un **minimum local** strict.

Le critère de Sylvester

Q15.

On définit $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix}$ en complétant X_k par des zéros. Par calcul par blocs, $X^T M X = X_k^T M_k X_k$.

Q16.

Si M est définie positive, pour tout $k \in [[1, n]]$ et tout $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, le vecteur complété X de la Q15 est non nul, donc $X_k^T M_k X_k = X^T M X > 0$. Ainsi, M_k est définie positive. Ses valeurs propres étant strictement positives, son déterminant (le k-ième mineur) est strictement positif. M vérifie donc le critère de Sylvester.

Q17.

Puisque M_{n-1} est définie positive, toutes ses valeurs propres sont strictement positives (Q9), et 0 n'est pas valeur propre. M_{n-1} est donc inversible. L'équation $M_{n-1}V + U = 0$ admet donc une unique solution $V = -M_{n-1}^{-1}U$.

Calculons $Q^T M Q$ par blocs :

$$\begin{aligned}
Q^T M Q &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ V^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ V^T M_{n-1} + U^T & V^T U + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M_{n-1} & M_{n-1}V + U \\ V^T M_{n-1} + U^T & (V^T M_{n-1} + U^T)V + V^T U + \alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Comme M_{n-1} est symétrique, $V^T M_{n-1} = (M_{n-1}V)^T = (-U)^T = -U^T$. D'où $V^T M_{n-1} + U^T = 0$. De plus, $M_{n-1}V + U = 0$. Il reste $Q^T M Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ 0 & V^T U + \alpha \end{pmatrix}$. En posant $\beta = V^T U + \alpha$, on a la forme voulue. Enfin, $\det(Q^T M Q) = \det(Q^T)\det(M)\det(Q) = \det(M)$ car $\det(Q) = 1$. Or $\det(Q^T M Q) = \det(M_{n-1})\beta$. Puisque $\det(M) > 0$ et M_{n-1} définie positive $\implies \det(M_{n-1}) > 0$, on conclut que $\beta > 0$.

Q18.

Démontrons par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété $\mathcal{P}_n$: « Toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester est définie positive ».

- **Initialisation** ($n = 1$) : $M = (a)$. L'unique mineur principal est $a > 0$. Pour tout $X = (x) \neq 0$, $X^T M X = ax^2 > 0$. $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \geq 2$, supposons $\mathcal{P}_{n-1}$ vraie. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère. Les $n-1$ premiers mineurs principaux de M sont les mineurs principaux de M_{n-1}. Ils sont donc tous > 0. Par hypothèse de récurrence, M_{n-1} est définie positive. D'après Q17, M est congruente à $D = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, posons $Y = Q^{-1}X = \begin{pmatrix} Y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$. Q étant inversible, $Y \neq 0$. $X^T M X = Y^T D Y = Y_{n-1}^T M_{n-1} Y_{n-1} + \beta y_n^2$. Puisque $Y \neq 0$, soit $Y_{n-1} \neq 0$, et alors le premier terme est > 0 et le second ≥ 0 ; soit $Y_{n-1} = 0$, et alors $y_n \neq 0$, le premier terme est nul et le second > 0. Dans tous les cas, $X^T M X > 0$. M est définie positive, ce qui prouve l'hérédité.

Q19.

Étudions les mineurs principaux de $C(x)$: $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 2 - 1 = 1 > 0$. $\Delta_3 = \det C(x) = 2(1 - x^2) - 1(1 - 0) = 1 - 2x^2$. $C(x)$ est définie positive si et seulement si $\Delta_3 > 0 \iff 1 - 2x^2 > 0 \iff x^2 < 1/2$. Donc $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

Q20.

Calculons les mineurs de la matrice D : $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 6-4 = 2 > 0$. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(3-1) - 2(2-(-1)) + 1(-2-3) = 4 - 6 - 5 = -7$. Puisque le troisième mineur principal est strictement négatif, la matrice n'est **pas définie positive**.

Q21.

La forme quadratique s'écrit $q(x, y, z) = X^T M X$ avec $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifions les mineurs de M : $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 4-1 = 3 > 0$. $\Delta_3 = \det(M) = 4(1-0) - 1(1-0) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}) = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} > 0$. Par le critère de Sylvester, M est définie positive, donc la quantité est strictement positive pour tout vecteur non nul.

Q22.

La matrice S_n est tridiagonale avec $\sqrt{3}$ sur la diagonale et 1 sur les sur/sous-diagonales. Notons $\Delta_n = \det(S_n)$. En développant par rapport à la première ligne, on obtient la relation de récurrence $\Delta_n = \sqrt{3}\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$. L'équation caractéristique $r^2 - \sqrt{3}r + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -1 = i^2$. Ses racines sont $e^{i\pi/6}$ et $e^{-i\pi/6}$. La solution générale est de la forme $\Delta_n = A\cos(n\frac{\pi}{6}) + B\sin(n\frac{\pi}{6})$. Avec $\Delta_1 = \sqrt{3}$ et $\Delta_2 = 3 - 1 = 2$, on trouve que $\Delta_n = \frac{\sin((n+1)\pi/6)}{\sin(\pi/6)} = 2\sin\left((n+1)\frac{\pi}{6}\right)$. Pour que S_n soit définie positive, il faut que $\Delta_k > 0$ pour tout $k \in [[1, n]]$. $\Delta_1 = \sqrt{3} > 0$, $\Delta_2 = 2 > 0$, $\Delta_3 = \sqrt{3} > 0$, $\Delta_4 = 1 > 0$, $\Delta_5 = 0$. Puisque Δ_5 n'est pas strictement positif, la condition n'est satisfaite que pour $n \leq 4$. La matrice S_n est définie positive si et seulement si $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.