

Proposition de Corrigé
Concours Commun INP 2025 – Mathématiques 2 (Filière MP)

EXERCICE 1

Q1.

La fonction doit parcourir l'ensemble des listes de successeurs (les valeurs du dictionnaire) et renvoyer la longueur maximale.

```
def degreMax(d: dict) -> int:
    if not d:
        return 0
    return max(len(voisins) for voisins in d.values())
```

Q2.

Le graphe inverse s'obtient en inversant le sens de chaque arc. À partir du dictionnaire de l'énoncé, on obtient le dictionnaire suivant :

```
{
    0: [],
    1: [0, 4],
    2: [1, 6],
    3: [0],
    4: [2, 3],
    5: [2],
    6: []
}
```

La fonction `grapheInv` peut être implémentée ainsi :

```
def grapheInv(d: dict) -> dict:
    inv = {s: [] for s in d}
    for u, voisins in d.items():
        for v in voisins:
            inv[v].append(u)
    return inv
```

Q3.

La fonction vérifie pour chaque sommet et chacun de ses voisins si les couleurs sont identiques.

```
def colorationValide(d: dict, L: list) -> bool:
    for u, voisins in d.items():
        for v in voisins:
            if L[u] == L[v]:
                return False
    return True
```

Q4.

La complexité dans le pire des cas est en $\mathcal{O}(N + M)$. **Justification** : La boucle extérieure parcourt les N sommets du graphe (les clés du dictionnaire, ce qui prend un temps proportionnel à N). La boucle intérieure parcourt les voisins de chaque sommet. Au total, sur l'ensemble de l'exécution, le test $L[u] == L[v]$ (qui se fait en $\mathcal{O}(1)$ grâce à l'accès direct aux éléments de la liste) est effectué exactement une fois pour chaque arc du graphe, soit M fois. Le coût total est donc bien de l'ordre de $N + M$.

Q5.

```
SELECT MAX(duree) FROM LOCATIONS;
```

Q6.

On effectue une jointure entre les deux tables, on groupe par film pour calculer la moyenne, puis on utilise `HAVING` pour filtrer et `ORDER BY` pour trier.

```
SELECT FILMS.codefilm, FILMS.nomfilm, AVG(LOCATIONS.duree) AS duree_moy
FROM FILMS
JOIN LOCATIONS ON FILMS.codefilm = LOCATIONS.codefilm
GROUP BY FILMS.codefilm, FILMS.nomfilm
HAVING AVG(LOCATIONS.duree) < 2
ORDER BY duree_moy DESC;
```

EXERCICE 2

Q7.

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geq 1$, P_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} .

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, $P_1 = X$. Son degré est bien 1 et son coefficient dominant est $1 = 2^{1-1}$. Pour $n = 2$, $P_2 = 2X(X) - 1 = 2X^2 - 1$. Son degré est 2 et son coefficient dominant est $2 = 2^{2-1}$.
- **Hérédité** : Supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$ ($n \geq 1$). $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$. Puisque $\deg(P_{n+1}) = n + 1$, $\deg(2XP_{n+1}) = n + 2$. Comme $\deg(P_n) = n < n + 2$, on a $\deg(P_{n+2}) = n + 2$. Le coefficient dominant de P_{n+2} est celui de $2XP_{n+1}$, c'est-à-dire $2 \times 2^{(n+1)-1} = 2^{n+1}$. La propriété est donc héréditaire.

En conclusion, pour $n = 0$, $\deg(P_0) = 0$ et le coefficient dominant est 1. Pour $n \geq 1$, $\deg(P_n) = n$ et le coefficient dominant est 2^{n-1} .

Q8.

Montrons cette relation par récurrence double.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, $P_0(\cos \theta) = 1 = \cos(0)$. Pour $n = 1$, $P_1(\cos \theta) = \cos \theta = \cos(1\theta)$.
- **Hérédité** : Supposons que $P_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$ pour $k = n$ et $k = n + 1$. D'après la relation de récurrence :

$$P_{n+2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta) - P_n(\cos \theta) = 2 \cos \theta \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$$

On sait que $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$. En l'appliquant à $a = (n+1)\theta$ et $b = \theta$:

$$2 \cos((n+1)\theta) \cos \theta = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta)$$

D'où $P_{n+2}(\cos \theta) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta)$. L'hérédité est prouvée. Pour tout réel θ , on a bien $P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Q9.

L'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur l'intervalle ouvert $] - 1, 1[$.

- **En 1^-** : La fonction est équivalente à $\frac{P(1)Q(1)}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \sim \frac{P(1)Q(1)}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$. Cette fonction est de la forme $\frac{K}{(1-t)^\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Par les critères de Riemann, l'intégrale converge en 1.
- **En -1^+** : Par un raisonnement similaire, la fonction est équivalente à $\frac{P(-1)Q(-1)}{\sqrt{2}\sqrt{1+t}}$, qui est intégrable car $\frac{1}{2} < 1$.

L'intégrale converge donc à ses deux bornes.

Q10.

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifie les propriétés suivantes :

- **Bilinéaire et symétrique** : Trivial par linéarité de l'intégrale et commutativité du produit de polynômes.
- **Positive** : Pour $P \in \mathbb{R}_k[X]$, $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \geq 0$ car l'intégrande est positif.
- **Définie** : Si $\langle P, P \rangle = 0$, l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $] - 1, 1[$ est nulle. On en déduit que $\frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0$ pour tout $t \in] - 1, 1[$. Le polynôme P a donc une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

L'application définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$.

Q11.

Notons $I_{n,m} = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta$. En utilisant la formule $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$:

$$I_{n,m} = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)) d\theta$$

- Si $n \neq m$: $n+m \neq 0$ et $n-m \neq 0$. Les primitives de ces cosinus sont des sinus, qui s'annulent en 0 et en π (car ce sont des multiples entiers de π). D'où $I_{n,m} = 0$.
- Si $n = m \neq 0$: $\cos((n-m)\theta) = \cos(0) = 1$. L'intégrale de $\cos(2n\theta)$ est nulle. Donc $I_{n,n} = \frac{1}{2} \int_0^\pi 1 d\theta = \frac{\pi}{2}$.
- Si $n = m = 0$: $\cos(0) \cos(0) = 1$, d'où $I_{0,0} = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi$.

Q12.

Calculons $\langle P_n, P_m \rangle$ à l'aide du changement de variable $t = \cos \theta$. La fonction $\theta \mapsto \cos \theta$ est un C^1 -difféomorphisme décroissant de $]0, \pi[$ sur $] - 1, 1[$. On a $dt = -\sin \theta d\theta$, et $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\cos^2 \theta} = \sin \theta$ (car $\sin \theta > 0$ sur $]0, \pi[$).

$$\begin{aligned} \langle P_n, P_m \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_\pi^0 \frac{P_n(\cos \theta)P_m(\cos \theta)}{\sin \theta} (-\sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = I_{n,m} \end{aligned}$$

D'après Q11, la famille (P_0, \dots, P_k) est une famille orthogonale. Leurs normes sont : $\|P_0\| = \sqrt{\pi}$ et pour $n \geq 1$, $\|P_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ est donc :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} P_0, \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_1, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_k \right)$$

PROBLÈME - Matrices de rang 1

Partie I - Exemples

Q13.

La matrice $M = UU^T$ est de rang 1 si le vecteur colonne U n'est pas nul, et de rang 0 si U est nul. Ainsi, $Y = 0$ si $\forall i, X_i = 0$. Par indépendance, $P(Y = 0) = \prod_{i=1}^n P(X_i = 0) = (1 - p)^n$. De plus, $Y = 1$ si $U \neq 0$, avec une probabilité de $P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - p)^n$. Y ne prend que les valeurs 0 et 1, donc Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1 - p)^n$.

Q14.

La trace d'une matrice $M = UU^T$ est égale à $\sum_{i=1}^n X_i^2$. Puisque X_i suit une loi de Bernoulli, $X_i \in \{0, 1\}$, ce qui implique que $X_i^2 = X_i$. Ainsi, $Tr(M) = \sum_{i=1}^n X_i$. C'est une somme de n variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p , indépendantes. $Tr(M)$ suit donc une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Q15.

$M^2 = (UU^T)(UU^T) = U(U^TU)U^T$. La quantité U^TU est un scalaire $\sum_{i=1}^n X_i^2$, qui est exactement $Tr(M)$. D'où $M^2 = U(Tr(M))U^T = Tr(M)(UU^T) = Tr(M)M$. M est une matrice de projection si et seulement si $M^2 = M$, c'est-à-dire $Tr(M)M = M$.

— Si $M = 0$, on a $Tr(M) = 0$, l'équation devient $0 = 0$ qui est vérifiée. La probabilité est $P(U = 0) = (1 - p)^n$.

— Si $M \neq 0$, alors $Tr(M)M = M \iff Tr(M) = 1$. L'événement $\{M \neq 0 \text{ et } Tr(M) = 1\}$ se réduit à $\{Tr(M) = 1\}$. Sa probabilité est $P(Tr(M) = 1) = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}$.

Ces deux événements sont disjoints. La probabilité que M soit un projecteur est donc :

$$P = (1 - p)^n + np(1 - p)^{n-1}$$

Q16.

Ici, X_i suit une loi de Poisson de paramètre λ . Comme précédemment, M est un projecteur si $M = 0$ ou ($M \neq 0$ et $Tr(M) = 1$).

— L'événement $M = 0$ équivaut à $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$. Par indépendance, sa probabilité est $(e^{-\lambda})^n = e^{-n\lambda}$.

— L'événement $Tr(M) = 1$ avec $M \neq 0$ implique $\sum X_i^2 = 1$. Comme les X_i sont à valeurs dans \mathbb{N} , cela équivaut à ce qu'exactly une des variables vaille 1, et toutes les autres 0. Il y a n choix pour l'indice i tel que $X_i = 1$. La probabilité est donc $n \times P(X_1 = 1) \times \prod_{j \neq 1} P(X_j = 0) = n (\lambda e^{-\lambda}) (e^{-\lambda})^{n-1} = n\lambda e^{-n\lambda}$.

La probabilité totale est donc $e^{-n\lambda} + n\lambda e^{-n\lambda} = e^{-n\lambda}(1 + n\lambda)$.

Q17.

La matrice J a toutes ses colonnes identiques et non nulles. Son rang est donc 1. Sa trace est la somme de ses termes diagonaux, d'où $Tr(J) = n \times 1 = n$. Puisque son rang est 1, la dimension de son noyau est $n - 1$. 0 est donc valeur propre de multiplicité (géométrique et donc algébrique au moins) $n - 1$. La somme des valeurs propres est $Tr(J) = n$, la dernière valeur propre est donc n . J est diagonalisable car elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants (ou car son polynôme minimal $X(X - n)$ est scindé à racines simples). L'espace propre E_n est engendré par le vecteur colonne $e_1 = (1, 1, \dots, 1)^T$. L'espace propre E_0 (le noyau) a pour équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

Une base évidente est constituée des $n-1$ vecteurs $f_2 = (1, -1, 0, \dots, 0)^T$, $f_3 = (1, 0, -1, \dots, 0)^T$, \dots , $f_n = (1, 0, \dots, 0, -1)^T$. Une matrice de passage P est la matrice dont les colonnes sont e_1, f_2, \dots, f_n .

Q18.

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Elle a une seule colonne non nulle, donc $rg(A) = 1$.

Sa diagonale est nulle, donc sa trace est 0. Puisque $A^2 = 0$ et $A \neq 0$, son polynôme minimal est X^2 . Ce polynôme minimal n'est pas à racines simples. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

Partie II - Résultats généraux

Q19.

Puisque A est de rang 1, toutes ses colonnes sont proportionnelles à l'une d'entre elles non nulle, disons C . Ainsi, pour tout $j \in 1, n$, la j -ème colonne de A s'écrit $l_j C$ avec $l_j \in \mathbb{R}$. On en déduit que $A = C \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix} = CL$, où L est la matrice ligne $\begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{pmatrix}$. Puisque A n'est pas la matrice nulle, L est non nulle.

Q20.

La matrice $A = CL$ a pour termes diagonaux $a_{i,i} = c_i l_i$. La trace de A est $Tr(A) = \sum_{i=1}^n c_i l_i$. Par définition du produit matriciel, le réel $L \times C$ (qui est une matrice de taille 1×1) est exactement $\sum_{i=1}^n l_i c_i = Tr(A)$. On en déduit le calcul de A^2 :

$$A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = C(Tr(A))L = Tr(A)(CL) = Tr(A)A$$

Q21.

La matrice A est de rang 1, d'après le théorème du rang, son noyau est de dimension $n-1$. La valeur propre 0 est donc de multiplicité géométrique $n-1$. Le polynôme caractéristique de A est de degré n , il admet donc 0 comme racine d'ordre au moins $n-1$. La somme des racines complexes étant la trace de A , la dernière valeur propre est $Tr(A)$. D'où $\chi_A(X) = X^{n-1}(X - Tr(A))$ (au signe près).

- Si $Tr(A) \neq 0$, le polynôme $X(X - Tr(A))$ est un polynôme annulateur de A (d'après Q20) scindé à racines simples. Puisque $A \neq 0$ et $A \neq Tr(A)I_n$, le polynôme minimal est exactement $\pi_A(X) = X(X - Tr(A))$.
- Si $Tr(A) = 0$, l'équation Q20 donne $A^2 = 0$. Puisque $A \neq 0$, le polynôme minimal est $\pi_A(X) = X^2$.

Q22.

Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. D'après la Q21, si $Tr(A) \neq 0$, le polynôme minimal est $X(X - Tr(A))$ dont les racines 0 et $Tr(A)$ sont distinctes : A est diagonalisable. Si $Tr(A) = 0$, le polynôme minimal est X^2 qui a une racine double : A n'est pas diagonalisable.

Q23.

Puisque $rg(u) = 1$, la dimension de $Im(u)$ est 1. Si $Im(u) \cap Ker(u) \neq \{0\}$, l'intersection qui est incluse dans $Im(u)$ a une dimension au moins 1, elle est donc égale à $Im(u)$. Ainsi, $Im(u) \subseteq Ker(u)$. Soit $e_2 \in Im(u)$ un vecteur non nul. On a $u(e_2) = 0$. Puisque $e_2 \in Im(u)$,

il existe un vecteur $e_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $u(e_1) = e_2$. e_1 n'est pas dans le noyau. La famille (e_1, e_2) est libre. On la complète avec des vecteurs e_3, \dots, e_n choisis dans $\text{Ker}(u)$ (qui est de dimension $n - 1$) de sorte à former une base de \mathbb{R}^n . Dans cette base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$, on a $u(e_1) = e_2$ et $u(e_k) = 0$ pour tout $k \geq 2$. La matrice représentative est bien celle de l'énoncé.

Q24.

La dimension de $\text{Im}(u)$ est 1 et $\text{Ker}(u)$ est un hyperplan. L'intersection étant nulle, on a $\mathbb{R}^n = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$. Soit e_1 une base de $\text{Im}(u)$. Puisque $e_1 \in \text{Im}(u)$, $u(e_1) \in \text{Im}(u)$, donc il existe un réel a tel que $u(e_1) = ae_1$. Comme $e_1 \notin \text{Ker}(u)$, on a $a \neq 0$. Notons qu'en utilisant la trace, on a $a = \text{Tr}(u) \neq 0$. On choisit pour (e_2, \dots, e_n) une base de $\text{Ker}(u)$. Dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) , la matrice de u est bien la matrice diagonale avec a en haut à gauche et des zéros partout ailleurs.

Q25.

Soit A et B deux matrices de rang 1.

- Si $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 0$, elles vérifient toutes les deux les conditions de la Q23, donc elles sont toutes les deux semblables à la même matrice (celle avec un unique 1 en ligne 2 colonne 1). Elles sont donc semblables entre elles par transitivité.
- Si $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = a \neq 0$, elles vérifient les conditions de la Q24, elles sont donc toutes les deux semblables à $\text{diag}(a, 0, \dots, 0)$, et donc semblables entre elles.

La réciproque est évidente : deux matrices semblables ont nécessairement la même trace. Ainsi, deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.