**SESSION 2008**

# CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PSI

## MATHEMATIQUES 2

---

**Les calculatrices sont autorisées.**

* * * *

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

* * * *

*Le sujet comporte 5 pages.*

## Notations :

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de $0$.
Pour $n$ entier naturel non nul, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à $n$ lignes et à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Pour $A$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\det(A)$ le déterminant de la matrice $A$.
Étant donné un espace vectoriel $E$, on note $\mathrm{Id}_E$ l'endomorphisme identité de $E$.
On note $\mathrm{Im}\ell$ l'image d'un endomorphisme $\ell$ de $E$ et $\mathrm{Ker}\ell$ son noyau.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\ell^k$ l'endomorphisme de $E$ défini par $\ell^k = \mathrm{id}$ si $k = 0$ et $\ell^k = \ell \circ \ell^{k-1}$ sinon.
Étant donné un sous-espace vectoriel $F$ d'un espace vectoriel de dimension finie, on note $\dim F$ la dimension de $F$. On désigne par $\mathrm{Vect}(u, v)$ (respectivement $\mathrm{Vect}(u, F)$) le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u$ et $v$ (respectivement engendré par le vecteur $u$ et les vecteurs de $F$).
Lorsque $E$ sera un espace vectoriel normé, on notera $\|u\|$ la norme d'un vecteur $u$.
Lorsque $E$ sera un espace euclidien, on notera $(u|v)$ le produit scalaire des vecteurs $u$ et $v$ ; on note $O(E)$ le groupe orthogonal de $E$ (c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes orthogonaux de $E$), $F^\perp$ désigne l'orthogonal du sous-espace $F$ et $\ell^*$ désigne l'adjoint de l'endomorphisme $\ell$.

## Objectifs :

Étant donné un endomorphisme $\ell$ d'un espace vectoriel $E$, pour tout $x$ de $E$ et tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on définit

$$L_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ell^k(x).$$

En prenant différentes hypothèses pour $E$ et pour $\ell$, on étudie la limite de la suite $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $E$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

Dans la première partie, on étudie cette limite dans trois exemples. Dans la deuxième partie, on obtient la limite de la suite $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ dans un cadre plus général ; cette limite est obtenue à l'aide d'une propriété d'algèbre linéaire que l'on fait établir dans trois contextes généraux différents.
Dans la troisième partie, cette propriété algébrique permet d'obtenir un résultat concernant une décomposition des automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien.

# PARTIE I : EXEMPLES

La partie **I** permet d'illustrer les résultats établis dans la partie **II**. Elle doit être traitée sans utiliser les résultats de la partie II. Les exemples **I.A**, **I.B**, **I.C** sont indépendants les uns des autres.

Dans cette partie, $E$ est un espace vectoriel de dimension 4, rapporté à une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

**I.A** Soit $s$ l'endomorphisme de $E$ défini par sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

**I.A.1 Réduction de l'endomorphisme $s$**

**I.A.1.1** Justifier l'affirmation : l'endomorphisme $s$ est diagonalisable. Calculer la matrice $S^2$.

**I.A.1.2** En déduire que $s$ est un automorphisme orthogonal de $E$ et que $1$ et $-1$ sont ses valeurs propres.

On note $E_1$ et $E_{-1}$ les sous-espaces propres de $s$ respectivement associés aux valeurs propres $1$ et $-1$. Il résulte des questions précédentes que $E_1$ et $E_{-1}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $E$.

**I.A.1.3** Calculer la trace de $s$. En déduire la dimension de $E_1$ et $E_{-1}$.

**I.A.2** On considère les trois vecteurs de $E$ : $u = e_1 + e_3 + e_4$, $u_2 = e_1 + E_2 + 2e_4$ et $u_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.

**I.A.2.1** Déterminer les vecteurs $s(u_1)$ et $s(u_2)$. En déduire que $(u_1, u_2)$ est une base de $E_1$. Déterminer une base orthonormale de $E_1$.

**I.A.2.2** Déterminer un vecteur non nul $u = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ orthogonal aux trois vecteurs $u_1$, $u_2$ et $u_3$. En déduire que $(u_3, u_4)$ forme une base orthogonale de $E_{-1}$.

**I.A.3** Pour tout $x$ de $E$ et tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} s^k(x)$.

**I.A.3.1** Pour $x \in E$ fixé, on note $x = y + z$ avec $y \in E_1$ et $z \in E_{-1}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$, déterminer un réel $\alpha_k$ tel que $s^k(x) = y + \alpha_k z$.
En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un réel $\beta_n$ tel que $S_n(x) = y + \beta_n z$.

**I.A.3.2** Déduire de ce qui précède que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $E$ a une limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Exprimer cette limite en fonction de $x$ et de $s(x)$.

**I.B** Soit $\ell$ l'endomorphisme de $E$ défini par sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\ell) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

**I.B.1 Une propriété concernant les normes.**

**I.B.1.1** Pour tout vecteur $u = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ de $E$, calculer $\|u\|^2 - \|\ell(u)\|^2$.
Prouver l'inégalité $\|\ell(u)\| \leq \|u\|$.

**I.B.1.2** En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur $u$ vérifie l'égalité $\|\ell(u)\| = \|u\|$.
Montrer que $1$ est valeur propre de $\ell$ et que le sous-espace propre associé est de dimension 2.

**I.B.2 Réduction de l'endomorphisme $\ell$.**

**I.B.2.1** Déterminer le polynôme caractéristique de $\ell$.

**I.B.2.2** Montrer que $\ell$ possède une autre valeur propre $\lambda \neq 1$ que l'on déterminera.
Justifier que les sous-espaces propres $G_1$ et $G_\lambda$ de $\ell$ associés aux valeurs propres 1 et $\lambda$ sont supplémentaires dans $E$.

**I.B.3** Pour tout $x$ de $E$ et tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on note $L_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ell^k(x)$.

Soit $x \in E$. On note $x = y + z$ avec $y \in G_1$ et $z \in G_\lambda$.

**I.B.3.1** Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $\ell^k(x)$ en fonction de $y$, $z$ et $k$.

**I.B.3.2** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, exprimer $L_n(x)$ en fonction de $y$, $z$ et $n$.
En déduire que la suite $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $E$ a une limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

**I.C** Soit $t$ l'endomorphisme de $E$ défini par sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(t) = T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

**I.C.1** Montrer que $T$ est une matrice orthogonale.

**I.C.2** On considère les deux vecteurs suivants de $E$ : $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + e_4)$ et $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_4)$.

**I.C.2.1** On note $F = \mathrm{Vect}(e_1, \varepsilon_1)$. Déterminer les vecteurs $t(e_1)$ et $t(\varepsilon_1)$.
En déduire que $F_1$ est un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension 2, stable par $t$.

**I.C.2.2** Soit $F_2 = F_1^\perp$ l'orthogonal du sous-espace $F_1$. Montrer que $F_2$ est stable par $t$.
Montrer que $(e_2, \varepsilon_2)$ est une base de $F_2$.

La famille de vecteurs $\mathscr{B}' = (e_1, \varepsilon_1, e_2, \varepsilon_2)$ est donc une base de $E$.

**I.C.3** On note $T' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(t)$.

**I.C.3.1** Justifier que la matrice $T'$ est orthogonale. Expliciter $T'$.

**I.C.3.2** Soit $\theta = \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$. Exprimer la matrice $T'$ en fonction de $\theta$.

On oriente le plan $F_1$ par la base $(e_1, \varepsilon_1)$ (respectivement on oriente le plan $F_2$ par la base $(e_2, \varepsilon_2)$).
Préciser la nature géométrique de l'endomorphisme de $F_1$ (respectivement de $F_2$) induit par $t$.

**I.C.3.3** Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer en fonction de $\theta$ et $k$ la matrice de $t^k$ relativement à la base $\mathscr{B}'$.

**I.C.4** Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\zeta_n(\omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\omega}$.

Expliciter $\zeta_n(\omega)$ selon les valeurs de $\omega$.
En déduire les réels $\omega$ pour lesquels la suite complexe $(\zeta_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

**I.C.5** Pour tout $x$ de $E$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k(x)$.

**I.C.5.1** Justifier que le sous-espace $F_1$ est stable par $T_n$.

**I.C.5.2** Soit $y = \alpha e_1 + \beta \varepsilon_1 \in F_1$.
On note $t^k(y) = \gamma_k e_1 + \delta_k \varepsilon_1$, $T_n(y) = \lambda_n e_1 + \mu_n \varepsilon_1$.

**I.C.5.2.1** Déterminer la matrice $V_k \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} \gamma_k \\ \delta_k \end{pmatrix} = V_k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

En déduire la matrice $U_n \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} \lambda_n \\ \mu_n \end{pmatrix} = U_n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

On exprimera $V_k$ en fonction de $\theta$ et $k$ et $U_n$ en fonction de $\theta$ et $n$.

**I.C.5.2.2** Montrer que la suite $(T_n(y))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $E$ a une limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

**I.C.5.3** Soit $x \in E$. En écrivant $x = y + z$ avec $y \in F_1$ et $z \in F_2$, montrer que la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

## PARTIE II

Dans cette partie, $E$ est un espace vectoriel réel. Étant donné un endomorphisme $\ell$ de $E$, pour tout $x$ de $E$ et tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on pose $L_n(x) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ell^k(x)$.

**II.A** Dans cette partie **II.A**, on suppose que $E$ est un espace euclidien et que $\ell \in O(E)$.

**II.A.1** Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux. En déduire qu'ils sont supplémentaires dans $E$.
Soit $x \in E$. D'après le résultat précédent, il existe $y \in \mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ et $z \in E$ tels que $x = y + \ell(z) - z$.

**II.A.2** Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $\ell^k(x)$ en fonction de $y$, $z$ et $k$. En déduire l'expression de $L_n(x)$ en fonction de $y$, $z$ et $n$.

**II.A.3** Montrer que la suite $(L_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite que l'on déterminera quand $n$ tend vers $+\infty$.

Dans la suite de la partie **II**, étant donné un espace vectoriel normé $E$, on notera $B(E)$ l'ensemble des endomorphismes $h$ de $E$, qui vérifient , pour tout $x$ de $E$ : $\|h(x)\| \leq \|x\|$.

**II.B** Dans cette partie **II.B**, on suppose que $E$ est un espace euclidien. Soit $f \in B(E)$. On note $f^*$ l'adjoint de $f$.

**II.B.1** Montrer que $f^*$ appartient à $B(E)$.

**II.B.2** Montrer que si $x \in E$ vérifie $f(x) = x$ alors $\|f^*(x) - x\|^2 \leq 0$.
Montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f^* - \mathrm{Id}_E)$.

**II.B.3** En déduire que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ supplémentaires dans $E$ (on pourra utiliser le résultat suivant : pour $\varphi$ endomorphisme de $E$, $\mathrm{Ker}(\varphi^*) = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$).

**II.C** Dans cette partie **II.C**, on suppose que $E$ est un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $\ell \in B(E)$. Pour tout $x$ de $E$ et tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on reprend la notation $L_n(x)$ définie au début de la partie **II**.

**II.C.1** On suppose que $x$ appartient à l'intersection de $\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E)$. Soit $y$ dans $E$ tel que $x = \ell(y) - y$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\ell^n(y)$ en fonction de $x$, $y$ et $n$.
En déduire $\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $E$.

**II.C.2** Soit $x \in E$. Montrer que la suite $(L_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $E$ a une limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

## PARTIE III

Dans cette partie, $E$ est une espace euclidien et $\ell \in O(E)$. Soit $e$ un vecteur non nul de $E$.
Pour tout $x$ de $E$, on note $\sigma_e(x) = x - 2\dfrac{(x|e)}{\|e\|^2} e$.

**III.1** Calculer $\sigma_e(e)$. Pour $x$ orthogonal à $e$, calculer $\sigma_e(x)$. Montrer que $\sigma_e$ est un automorphisme orthogonal de $E$.

$\sigma_e$ est donc la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal $(\mathrm{Vect}(e))^\perp$.

**III.2** On note $W = \mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ et on suppose que $W$ est différent de $E$. Soit $u$ un vecteur fixé de $E$ tel que $u \notin W$. Dans la suite, on choisit $e = \ell(u) - u$.

**III.2.1** Montrer que $e$ est orthogonal à $W$ (on pourra utiliser le résultat de **II.A.1**).

**III.2.2** Calculer $\sigma_e(\ell(u) - u)$ et $\sigma_e(\ell(u) + u)$. En déduire $\sigma_e(\ell(u))$ et $\sigma_e(u)$.

**III.2.3** Montrer l'égalité $\mathrm{Vect}(u, W) = \mathrm{Ker}(\sigma_e \circ /ell - \mathrm{Id}_E)$.

**III.2.4** En déduire que $\ell$ peut se décomposer en la composée de $p$ réflexions et exprimer $p$ en fonction de $k = \dim(W)$ et $n = \dim(E)$.