Mathématiques 2

PSI

2018

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Ce problème aborde la notion de moment dans différents contextes : moment d'une variable aléatoire réelle discrète à valeurs positives dans la partie I ; moment d'une suite numérique réelle dans la partie II ; moment d'une fonction dans la partie III.

Notations

Si f est une fonction de classe C^∞ et p un entier naturel, on note $f^{(p)}$ la dérivée p-ième de f.

On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Si a et b sont deux entiers naturels, $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b.

Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une espérance, celle-ci est notée $\mathbb{E}(X)$.

Préambule

On admet le résultat suivant :

si $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de nombres réels telle que

i. pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{q\geqslant 0} |u_{p,q}|$ converge,

ii. la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right)$ converge,

alors, en notant $S_p = \displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$ et, pour tout n entier naturel, $W_n = \displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\\ p+q=n}} u_{p,q}$,

- pour tout $q \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} u_{p,q}$ converge ; on note S'_q sa somme ;
- les séries $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} S_p$, $\displaystyle\sum_{q\geqslant 0} S'_q$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} W_n$ convergent ;
- $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} S_p = \sum_{q=0}^{+\infty} S'_q = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n$, c'est-à-dire :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\\ p+q=n}} u_{p,q}\right)$$

I Moments d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Si $p \in \mathbb{N}$, on dit que X admet un moment d'ordre p si la variable aléatoire X^p admet une espérance. On note alors $m_p(X)$, appelé *moment d'ordre p de X*, l'espérance de X^p.

On remarque que $m_0(X) = 1$.

Q 1. Justifier que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant X^k \leqslant 1 + X^n$.

Q 2. En déduire que, si X admet un moment d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), alors X admet des moments d'ordre k pour tous $k \in [\![1, n-1]\!]$.

I.A – *Fonction génératrice des moments*

On suppose que, pour tout entier naturel non nul n, X admet un moment d'ordre n et que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} m_n(X)\frac{t^n}{n!}$ admet un rayon de convergence $R_X > 0$.

Pour tout $t \in \left]-R_X, R_X\right[$, on note $M_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} m_n(X)\frac{t^n}{n!}$. La fonction M_X s'appelle la *fonction génératrice* des moments de la variable aléatoire X.

Q 3. Justifier que la connaissance de la fonction M_X permet de déterminer de manière unique la suite $\left(m_n(X)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 4. En utilisant les résultats du préambule, montrer que, pour tout $t \in \left]-R_X, R_X\right[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance et que $M_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$.

Q 5. Montrer réciproquement que, s'il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout $t \in \left]-R, R\right[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, alors l'ensemble de définition de la fonction génératrice des moments de X contient $\left]-R, R\right[$ et pour tout $t \in \left]-R, R\right[$, $M_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$.

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes à valeurs strictement positives admettant des moments de tous ordres. On note R_X (respectivement R_Y) le rayon de convergence (supposé strictement positif) associé à la fonction M_X (respectivement M_Y).

Q 6. Montrer que la variable aléatoire $X+Y$ admet des moments de tous ordres et que

$$\forall |t| < \min(R_X, R_Y), \quad M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t)$$

I.B – Exemples

λ est un nombre réel fixé.

I.B.1) On suppose que Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Q 7. Montrer que Z admet des moments de tous ordres.

Q 8. Calculer la fonction génératrice des moments de Z. En déduire les valeurs de $m_1(Z)$ et $m_2(Z)$.

I.B.2) Soit n un entier naturel non nul. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre λ/n. On suppose que $X_1, X_2, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes et on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Q 9. Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire S_n.

Q 10. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{n\to+\infty} M_{S_n}(t)$.

Q 11. Comparer avec les résultats de la question 8.

I.B.3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, U_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $Y_n = \dfrac{1}{n} U_n$.

Q 12. Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Y_n.

Q 13. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{n\to+\infty} M_{Y_n}(t)$.

II Moments d'une suite numérique

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que, pour tout entier naturel p, la série $\sum_{n\geqslant 0} n^p a_n$ converge absolument, on appelle moment d'ordre p de la suite (a_n) le nombre $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p a_n$.

Le but de cette partie est de construire une suite non nulle dont tous les moments d'ordre p ($p \in \mathbb{N}$) sont nuls.

II.A – Étude d'une fonction

On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \varphi(x) = \exp\left(\dfrac{-x}{\sqrt{1-x}}\right) & \text{si } x < 1 \\ \varphi(x) = 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Q 14. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Q 15. Calculer $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \varphi'(x)$ et démontrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q 16. Montrer que, pour tout entier naturel non nul p, il existe deux polynômes P_p et Q_p à coefficients réels tels que, pour tout $x \in \left]-\infty, 1\right[$,

$$\varphi^{(p)}(x) = \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)$$

Q 17. En déduire $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \varphi^{(p)}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Q 18. En déduire que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour $p \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de $\varphi^{(p)}(1)$.

II.B – Développements en série

Q 19. Démontrer, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$,

$$\varphi(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q (1-x)^{-q/2}$$

On considère les polynômes de Hilbert

$$\begin{cases} H_0(X) = 1 \\ H_n(X) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X-k) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Q 20. Démontrer que, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$ et tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(1-x)^{-q/2} = \sum_{p=0}^{+\infty} H_p\left(\frac{q}{2} + p - 1\right) x^p$$

Q 21. En déduire

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \varphi(x) = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}(x) \right)$$

où l'on a posé

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad a_{i,j}(x) = \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} H_j\left(\frac{i-1}{2} + j\right) x^{i+j+1}$$

Q 22. Démontrer que, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \left|a_{i,j}(x)\right| \right) = \exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}} \right) - 1.$

Q 23. Utiliser les résultats admis dans le préambule pour établir l'égalité

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} H_k\left(\frac{n+k}{2} - 1\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

II.C – Un prolongement dans $\mathbb{C}$

On note $\mathcal{D}$ le disque ouvert unité de $\mathbb{C}$: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < 1\}$.

Q 24. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge.

Pour $z \in \mathcal{D}$, on note $\Phi_0(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et, sous réserve de convergence,

$$\Phi_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1) a_{n+p} z^n$$

Q 25. Justifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \left]-1,1\right[$, $\Phi_p(x) = \varphi^{(p)}(x)$ et que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathcal{D}$, la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1) a_{n+p} z^n$ converge.

Q 26. Justifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $\varphi^{(p)}$ est bornée sur $\left]-1,1\right[$.

On admet que la fonction Φ_p est bornée sur $\mathcal{D}$.

Q 27. Soit r un réel de l'intervalle $\left]0,1\right[$. Démontrer pour, tous entiers $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, que

$$(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1) a_{n+p} r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_p(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta} \,\mathrm{d}\theta$$

Q 28. Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un réel K_p et un entier naturel N_p tels que

$$\forall n \geqslant N_p, \quad |a_n| \leqslant \frac{K_p}{n^p}$$

Q 29. Démonter que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[0,1]$ et donner la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Q 30. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}x^n$ converge normalement sur $[0,1]$ et donner la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}$.

Q 31. Démontrer que tous les moments d'ordre p de la suite (a_n) sont nuls.

III Moments d'une fonction

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}$ si la fonction $t \mapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on appelle moment d'ordre p de f le nombre $\mu_p(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^p f(t)\,\mathrm{d}t$.

Le but de cette partie est de construire une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, non nulle, dont tous les moments d'ordre p ($p \in \mathbb{N}$) sont nuls.

III.A – Étude d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

On définit la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\begin{cases} \theta(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \theta(x) = \exp\left(-\dfrac{\ln^2 x}{4\pi^2} + \mathrm{i}\dfrac{\ln x}{2\pi}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Q 32. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} |\theta(x)| = 0$.

Q 33. Justifier que θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $P_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall x \in]0,+\infty[\qquad \theta^{(n)}(x) = \frac{P_n(\ln x)}{x^n}\theta(x)$$

Q 34. En déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} |\theta^{(n)}(x)| = 0$.

On pourra effectuer le changement de variable $y = -\ln x$.

Q 35. Démontrer que θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

III.B – Étude d'une intégrale

Q 36. Montrer que pour tout entier naturel p, l'intégrale

$$I_p = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-p\pi)^2} \sin t \,\mathrm{d}t$$

est absolument convergente et qu'elle vaut zéro.

Q 37. À l'aide du changement de variable $t = \dfrac{\ln x}{2\pi}$, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad I_p = \frac{e^{-p^2\pi^2}}{2\pi} \int_0^{+\infty} x^{p-1} \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right) \sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right) \mathrm{d}x$$

Q 38. Conclure.

• • • FIN • • •