CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

Les parties sont largement indépendantes, mais le candidat pourra admettre les résultats des parties intermédiaires. Les notations sont conservées d'une partie sur l'autre.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Partie I :

Soient a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = a, \quad b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ \qquad\qquad\quad b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

1. Que dire des suites (a_n) et (b_n), si $a = b$?
2. Montrer que si $(x, y) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$, on a

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

3. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones à partir du rang 1, puis qu'elles sont bornées.
4. Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite strictement positive.

On notera $M(a, b)$ la limite commune aux suites (a_n) et (b_n).

On définira la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = M(1, x)$.

5. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, exprimer en fonction de λ et $M(a, b)$ les quantités suivantes :

$$M(b, a) \qquad \text{et} \qquad M(\lambda a, \lambda b).$$

6. Justifier que $M(a, b) = af\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Partie II :

Pour a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les intégrales

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} \qquad \text{et} \qquad J(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}.$$

7. Justifier que les intégrales $I(a, b)$ et $J(a, b)$ convergent, puis que $J(a, b) = 2I(a, b)$.
8. En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{1}{2}\left(s - \dfrac{ab}{s}\right)$, montrer que

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a, b).$$

9. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I(a_n, b_n) = I(a, b).$$

10. Justifier que

$$I(M(a, b), M(a, b)) = I(a, b).$$

    On énoncera précisément le théorème utilisé.

11. Conclure que

$$M(a, b) = \frac{\pi}{2I(a, b)}.$$

Partie III :

12. On fixe $x > 0$. En effectuant le changement de variable $t = \frac{x}{s}$, montrer que

$$I(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\mathrm{d}t.$$

13. Montrer que $I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\mathrm{d}t$ est négligeable devant $2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\mathrm{d}t$ quand x tend vers 0^+.
14. Dériver $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ et en déduire une expression réduite pour $\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\mathrm{d}t$.
15. Déterminer un équivalent simple de $I(1,x)$ en $x = 0^+$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln x}.$$

16. Pour $x > 0$, déterminer une relation simple entre x, $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln x}.$$

17. Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
18. Montrer que l'on peut prolonger par continuité la fonction f en 0. Que dire de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 de la fonction ainsi prolongée ?
19. Que dire de la branche infinie de la courbe de f en $+\infty$?
20. Préciser rapidement les variations de f et tracer sa courbe sur $]0, +\infty[$.

Partie IV :

21. Soit $x \in]0, +\infty[$, montrer que

$$I(1,x) = \frac{2}{1+x} I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right).$$

22. On définit la suite (w_n) par $w_0 = x$ et $w_{n+1} = \frac{2\sqrt{w_n}}{1+w_n}$.
    (a) Montrer que la suite (w_n) converge vers 1.
    (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I(1,x) = I(1, w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k}.$$

    (c) Soit la suite (p_n) définie par

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{1+w_k}{2}.$$

    Montrer que la suite (p_n) converge vers une limite ℓ non nulle, puis exprimer de manière simple $I(1,x)\ell$.

Partie V :

On définit la fonction K par

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2\sin^2(t)}}\mathrm{d}t.$$

Tournez la page S.V.P.

23. Montrer que la fonction K est bien définie sur $]-1,1[$.

24. En effectuant un changement de variable, montrer que

$$I(1,x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2\cos^2(t)+\sin^2(t)}}.$$

25. Montrer que si $x\in]0,1]$, on a

$$I(1,x)=K\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

26. On définit la suite d'intégrales (W_n) par

$$W_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(t)\mathrm{d}t.$$

(a) Démontrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad W_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}W_n.$$

(on pourra considérer la quantité W_n-W_{n+1})

(b) Démontrer que

$$W_n=\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi.$$

27. Rappeler la valeur du rayon de convergence du développement en série entière de la fonction $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-t}}$, puis justifier l'expression du terme général de la suite de ses coefficients (α_n).

28. Démontrer que

$$\forall x\in]-1,1[,\ \forall t\in\mathbb{R},\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\sin^{2n}(t).$$

29. Justifier que, pour tout $x\in]-1,1[$, on a

$$K(x)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((2n)!)^2}{16^n(n!)^4}x^{2n}.$$

30. En déduire une série numérique permettant d'obtenir la valeur de $M(3,5)$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1137 – D'après documents fournis